

0-4

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos*
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc. PRÆSES.*
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Vena-
les apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio
D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
a Serenissimo
REGE CAROLO II.
A D
PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ
ET AUSPICIIS
POTENTISSIMI MONARCHÆ
JACOBI II.
FLORENTI.

Tractatum hunc humillime D. D. D.

J S. NEWTON.

P R Æ F A T I O

A D

L E C T O R E M.

Cum Veteres Mechanicam (uti Author est Pappus) in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint, & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phenomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu Mathesin excolere quatenus ea ad Philosophiam spectat. Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quæ per Demonstrationes accurate præcedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq; Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas describere Geometria non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat Geometriæ; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam Mechanica universalis pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc Mechanicæ a Veteribus in Potentiis quinque ad artes manuales spectantibus excolta fuit, qui Gravitationem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed naturalibus scribes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitationem, levitatem, vim Elasticam, resisten-
tiam



Præfatio ad Lectorem.

tiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter hæc nostra tanquam Philosophia principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophia difficultas in eo versari videtur, ut a Phenomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phenomena reliqua. Et hæc spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex phenomenis celestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Luna & Maris. Utinam cetera Naturæ phenomena ex principis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particula per causas nondum cognitæ vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares coherent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hæcenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam præbunt.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxerit & Schemata incidi curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratum a me figuram Orbium celestium impetraverat, rogare non destitit ut eadem cum Societate Regali communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cepissem quæ ad leges & mensuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus secundum datas quasunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cetera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrompere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inferere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.

I. N.
VIRI PRÆSTANTISSIMI
D. ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur vincti penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol folio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astri.
Discimus hinc tandem qua causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluxum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam

Deserit

Deferit, ac Nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torfere Sophorum,
Quæque Scholas frustra rauco certamine vexant
Obvia conspiciamus nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere sublimis Genii concessit æcumen.

Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoscite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui scriptis jussit Tabulis compescere Cades
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
Vel qui Niliacæ monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
Respiciens miseræ solummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Claustra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt sæcula mundi.

Talia monstrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
NEWTONUM clausi referantem scrinia Veri,
NEWTONUM Musis charum, cui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit Numine mentem:
Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

A Er duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta; uti posthac docebitur.

B

Def.

Def. II.

*Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate
Materiæ conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis, adeoque in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplex est, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq; , quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertię dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta, estq; exercitium ejus sub diverso respectu et Resistencia et Impetus: Resistencia quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus Resistentiam quiescentibus et Impetum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem, neq; semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

Def. IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neq; post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim

vim inertiae. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, expressione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcumq; tendit.

Hujus generis est gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcumq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejusdem major in minori Distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum constat) atq; adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis a Terra; in æqualibus autem distantis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; cor-
pore

pore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hæc virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires absolutas, acceleratrices & motrices, & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex propensionibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; siue causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) siue alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus. Nam virium causas & sedes phyficas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunq; in centrum, indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non phyfice sed Mathematicè tantum considerando

rando. Unde caveat lector ne per huiusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

Scholium.

Haftenus voces minus notas, quo in sensu in sequentibus accipiendæ sunt, explicare visum est. Nam tempus, spatium, locum et motum ut omnibus notissima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates hæc non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipit. Et inde oriuntur præiudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares distinguere.

I. Tempus absolutum verum & Mathematicum, in se & natura sua absq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, aliq; nomine dicitur *Duratio*; relativum apparens & vulgare est sensibilis & externa quævis *Durationis* per motum mensura, (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut *Hora, Dies, Mensis, Annus*.

II. *Spatium* absolutum natura sua absq; relatione ad externum quodvis semper manet simile & immobile; relativum est spatii huius mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: ut dimensio spatii subterranei, aerei vel cælestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine, sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur, spatium Aeris nostri quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus, & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. *Locus* est pars spatii quam corpus occupat, estq; pro ratione

tione spatii vel absolutus vel relativus. Partem dico spatii, non situm corporis vel superficiem ambientem. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de ipsius loco eadem cum summa translationum partium de locis suis, adeoq; locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis passis fertur, relativus corporis locus est navis regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi: & Quies relativa est permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera est permanſio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua Navis ipsa una cum cavitate sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quiescit, corpus quod relative quiescit in Navi, movebitur vere et absolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et absolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra: et si corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa ubi Navis versatur moveatur vere in Orientem, cum Velocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem versus cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et absolute in spatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem versus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus

Tempus absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per *Æquationem* Temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro *Mensura* Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi ut ex veriore Tempore mensurent motus cælestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus Temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentia rerum, siue motus sint celeres, siue tardi, siue nulli; proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per *Æquationem* Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii oscillatorii, tum etiam per Eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi loca. In Tempore quoad ordinem successi-
onis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum Essentia est ut sint loca, & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti motus.

Verum quoniam hæc spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui, earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, desinimus loca universa; deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusq; referantur.

Distinguntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, causas & effectus. Quietis proprietas
est

est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoq; cum possibile sit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Igitur motus corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur; sunt enim ambientia ad inclusa ut totius pars exterior ad partem internam, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absq; translatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis sunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps, usq; dum perveniat ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli: Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant

vant positiones ad invicem, atq; adeo semper manent immota, spatiumq; constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas : at motus relativus generari et mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur, at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur ; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu : superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis, at postquam, vi in aquam paulatim impressa, efficit vas, ut hæc quoq; sensibilibus revolvi incipiat, recedet ipsa paulatim e medio, ascendetq; ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuq; relativo hic

omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero ut aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusc; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri sunt, & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Systemate eorum qui Cælos nostros infra Cælos fixarum in orbem revolvunt, & Planetas secum deferre; Planetæ & singulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis suis proximis quiescunt, moventur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam sit in vere quiescentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt ex ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensurarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus si quantitates mensuratæ hic subintelligentur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces hæc de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quod partes spatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiae, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires qualibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id est facies positiæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum & inveniretur tensio ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus & apparentibus differentiis colligere, & contra, ex moribus seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fufius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

A X I O M A T A

S I V E

L E G E S M O T U S

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

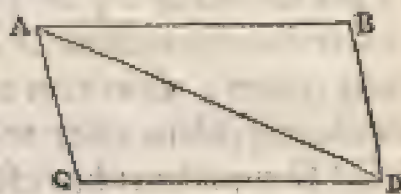
Actiōi contrariam semper & æqualem esse reactionem : sive corporum duorum actiōes in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impedit progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq; mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutue) subibit. His actionibus æquales sunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis :) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes facta, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separat is.

Si corpus dato tempore, vi sola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi sola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* sive vis *N* imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa



illa BD . Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD , & idcirco in utriusq; lineæ concursu D reperiri necesse est.

Corol. II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD ex viribus quibuscvis obliquis AB & BD , & vicissim resolutio vis cujuscvis directæ AD in obliquas quascunq; AB & BD . Quæ quidem Compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radij inæquales OM , ON filis MA , NP sustineant pondera A & P , & quarantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta KOL filis perpendiculariter occurrens in K & L , centroq; O & intervallorum OK , OL majore OL describatur circulus occurrens filo MA in D : & actæ rectæ OD parallela sit AC & perpendicularis DC . Quoniam nihil refert utrum filorum puncta K , L , D affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis K & L vel D & L . Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD , & hæc resolvetur in vires AC , CD , quarum AC trahendo radium OD directè a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC , trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium OL ipsi OD æqualem; hoc est idem atq; pondus P , quod sit ad pondus A ut vis DC ad vim DA , id est (ob similia triangula ADC , DOK), ut DO (seu OL) ad OK . Pondera igitur A & P , quæ sunt reciproce ut radii in directum positi OK & OL , idem pollebunt & sic consistent in æquilibrio: (quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis



Vectis & Axis in Peritrochio:) si pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np , partim incumbat plano obliquo pG : agantur pH , NH , prior horisonti, posterior plano pG perpendicularis; & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH , resolvi potest hæc in vires pN , HN . Si filo pN perpendicularare esset planum aliquod pQ secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ , pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN , HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN & planum pG vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ ut pondus tendat filum, quoniam filum sustinendo pondus, jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi pN , qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH . Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum AM , pN a centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis filii facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum pQ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel icu mallei impellitur secundum lineam pH in plano, ut pN ad pH ; atq; ad vim qua urget planum alterum pG ut pN ad NH . Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Ullus igitur Corollaris hujus latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diversimode demonstrata. Ex hæc enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascenduntibus, cæterisque potentijs Mechanicis:

nicis componi solent, ut & vires Nervorum ad animalium ossa movenda.

Corol. III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales sunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphericum *A* sit triplo majus corpore spharico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B* ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque existente semper summa partium sexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progredietur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel regredietur cum una parte amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atq; ita summa motuum conspirantium $15+1$ vel $16+0$, differentie contrariorum

17-1 & 18-2 semper erant partium sexdecim ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, inveniatur cuiusq; velocitas ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem ut motus post ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; inveniatur eius velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duae ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphaerica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem, cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrunt tanguntur in puncto concursus; dein corporis utriusq; motus (per Corol. 2.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes aequales in partes contrarias tribuendae sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quae prius. Ex huiusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

Corol. III.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter se non mutatur situm suum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum divi-

dens vel quiescet vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in Lemmate xxiii demonstratur in plano, & eadem ratione demonstrari potest in loco solido. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuscvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuscvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quae actionibus in se invicem, alijsque omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, adeoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiae eorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciprocae ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, aequales inter se. Proinde centrum illud a motuum aequalibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum, & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur: distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro, in partes summas totalibus corporum, quorum

rum sunt centra, reciproce proportionales, adeoque, centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum; manifestum est quod commune illud omnium centrum, ab actionibus binorum corporum inter se, nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ, & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus & quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum, nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis assumari semper debet.

Corol. V.

Corporum dato spatio inclusorum idem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum absq; motu circulari.

Nam differentie motuum tendentium ad eandem partem, & summe tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congressuum effectus in utroque casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales moribus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

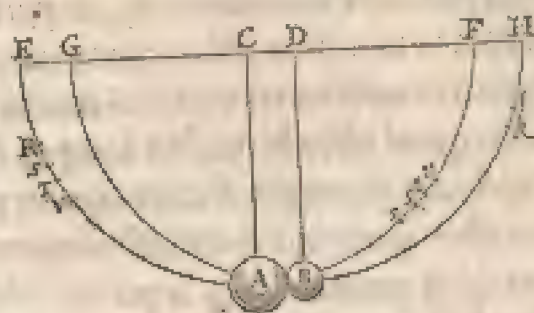
Si corpora moveantur quomodocumq; inter se & a viribus acceleratricibus aequalibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illae aequaliter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia aequaliter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 2.) adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium

Haecenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galileus* descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilem fieri in Parabola, conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistantiam aliquantulum retardantur. Ab iisdem Legibus & Corollariis pendet demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem & Lege tertia *D. Christopherus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius* S.T.D. & *D. Christianus Hugenus*, hujus aetatis Geometrarum facile Principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum scorsim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes; Et primus quidem *D. Wallisius*, dein *D. Wrennus* & *D. Hugenus* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata est a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clarissimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus est. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amissum congruat, habenda est ratio tum resistantiae aeris, tum etiam vis Elasticae concurrentium corporum. Pendeant corpora *A, B* filis parallelis *AC, BD* a centris *C, D*. His centris & intervallis

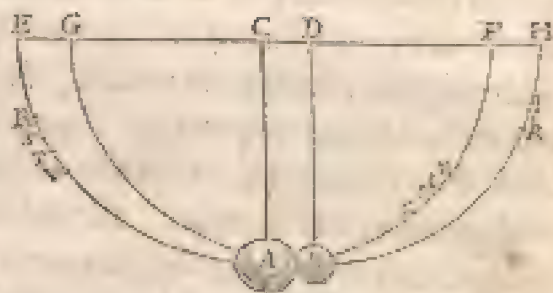
vallis describantur semicirculi EAF , GBH radijs CA , DB bisecti. Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R , & (subducto corpore B) demittatur inde, redeatq; post unam oscillationem ad punctum V . Est RV retardatio ex resiliencia aeris. Hujus RV fiat ST pars



quarta sita in medio, & hæc exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proxime. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S , & velocitas ejus in loco reflexionis A ,

absq; errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo cecidisset de loco T . Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus TA . Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chorda arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum t , & corpus B ad locum k . Tollatur corpus B & inveniatur locus v , a quo si corpus A demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum r , sit rt pars quarta ipsius rv sita in medio, & per chordam arcus tA exponatur velocitas quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A . Nam t erit locus ille verus & correctus ad quem corpus A , sublata aeris resiliencia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k , ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l , ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A in chordam arcus TA (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco A proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus tA ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus Bk ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusq; tam ante, quam post reflexionem; & tum de-

demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim vel sexdecim concurrerent, reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, quod in partes contrarias mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus, corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviamibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractioe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim & restabit nihil; subducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinque & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus, pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium & differentia contrariorum colligebatur. Namq; errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accurate. Difficile erat tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*, tum loca *i*, & notare ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis pilis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.



Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujuscumque nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si conditio illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certa proportionem pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrennii* & *Hugenij* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditu: minuenda est simul cum vi Elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu laeduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arete conglomerata & fortiter contricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietq; systema corporum duc-

rum.

rum & obstaculi moveri in directum in partes versus *B*, motuq; in spatiis liberis semper accelerato abire in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debet systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora aequaliter urgebunt obstaculum, & ideirco aequaliter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsum posita, in aqua stagnante juxta fluerent, neutrum propelleret alterum, sed æqualitate attractionis utrinq; sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oscillante Libra, sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si recta ascendant & descendant, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantia ab axe Libræ; sin planis obliquis aliisve ad motus obstaculis impedita ascendant vel descendant oblique, æquipollent quæ sunt ut ascensus & descensus quatenus facti secundum perpendicularum: id adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum si sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas impinguntur, sustinebunt se mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam Cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus cuneus

neus urget partes duas ligni fissi est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistantiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohesione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistantia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere quam late pateat, quamq; certa sit Lex tertia motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Resistentis reactio ex ejus partium singulorum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohesione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE
MOTU CORPORUM

Liber PRIMUS

SECT. I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

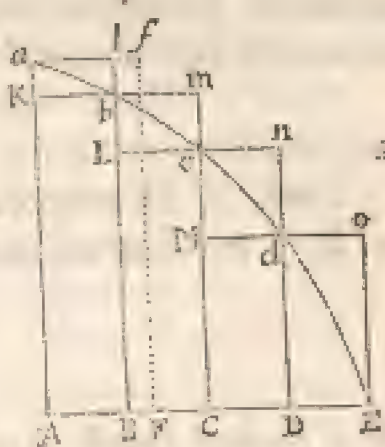
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo passo propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; sunt ultimo æquales.

Si negas, sit earum ultima differentia D . Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D : contra hypothesin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis $AacE$ rectis Aa , AE , & curva AcE comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq; Ab , Bc , Cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. equalibus, & lateribus Bb , Cc , Dd , &c. figura lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuitur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta $AKbLcMdD$, circumscripta $AalbmcndoeE$, & curvilinea $AabcdE$, sunt rationes æqualitatis.



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $Kl + Lm + Mn + Do$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summa Aa , id est rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia sunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inequales, & omnes minuantur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ, at latitudine sua AF

in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

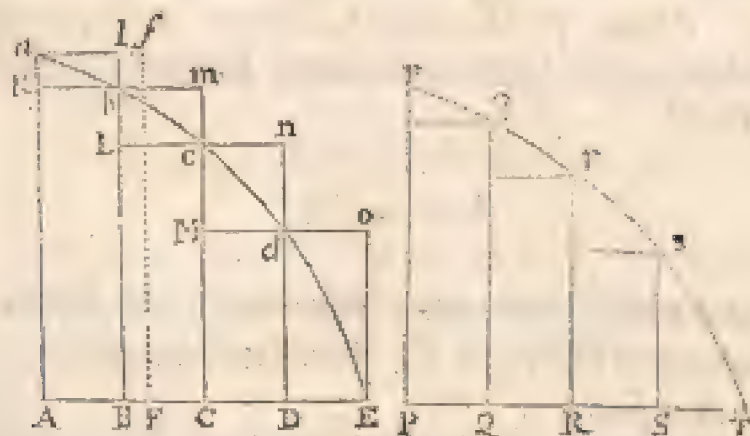
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum ab , bc , cd , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acE ,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei,

Lemma IV.

Si in duabus figuris $AacE$, $PprT$, inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuantur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod figuræ duæ $AacE$, $PprT$, sunt ad invicem in eadem illa ratione.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad

ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lemma III.)
ad summam priorem, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis.

Corol. Hinc si duæ cujuscunq; generis quantitates in eundem partium numerum utrunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam ceteræq; suo ordine ad ceteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

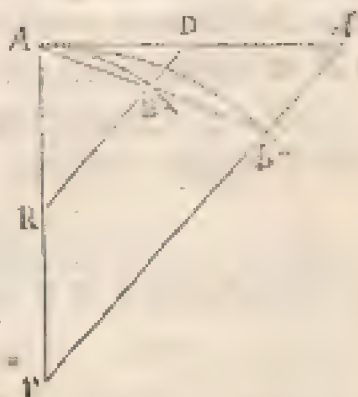
Lemma V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areae sunt in duplicata ratione laterum.

Lemma VI.

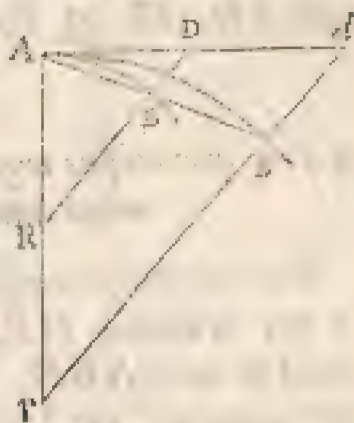
Si arcus quilibet positione datus AB subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta AD; dein puncta A, B ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus BAD sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet.

Nam producat *AB* ad *b* & *AD* ad *d*, & punctis *A*, *B* cocuntibus, nulla; adeo ipsius *Ab* parte *AB* jacente amplius intra curvam, manifestum est quod hæc recta *Ab*



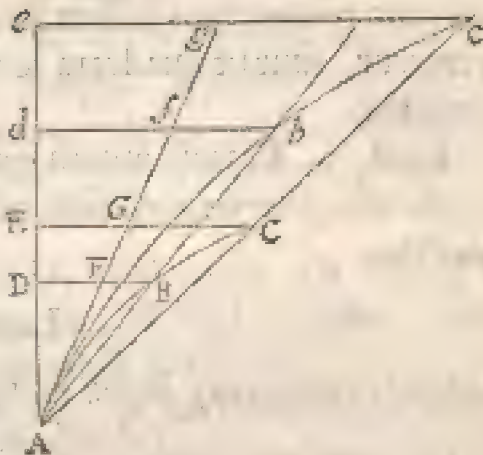
Nam producantur AB, AD, AR ad b, d & r . Ipsi RD agatur parallela rbd , & arcui AB similis ducatur arcus Ab . Coeuntibus punctis A, B , angulus bAd evanescet, & propterea triangula tria rAb, rAb, rAd coincident, suntq; eodem nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB, RAB, RAD sient ultimo sibi invicem similia & æqualia. Q. E. D.


Corol. Et hinc triangula illa in omni de
rationibus ultimis argumentatione pro se
invicem usurpari possunt.



Lemma IX.

Si recta AE & Curva AC positione data se mutuo secant in angulo dato A ; & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, EC , curvae occurrentes in B, C ; dein puncta B, C accedant ad punctum A : dico quod areae triangulorum ADB, AEC erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.



Etenim in AD producta ca-
 piantur Ad , Ae ipsis AD , AE  A
 proportionales, & erigantur or-
 dinatae db , ec ordinatis DB , EC parallelae & proportionales.
 Producat AC ad e , ducatur curva Abe ipsi ABC similis, &
 recta Ag tangatur curva utraq; in A ; & secantur ordinatim appli-
 catae in F , G , f , g . Tum coeant puncta B , C cum puncto A , &
 angulus Ag evanescente, coincident areae curvilineae Abd , Ace
 cum rectilincis Afd , Age , adeoque per Lemma V, erunt in du-
 plicata

plicata ratione laterum Ad , Ae : Sed his arcis proportionales semper sunt areae ABD , ACE , & his lateribus latera AD , AE . Ergo & areae ABD , ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD , AE . *Q. E. D.*

Lemma X.

Spatia, quae corpus urgente quacumq; vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponentur tempora per lineas AD , AE , & velocitates genitae per ordinatas DB , EC , & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areae ABD , ACE his ordinatis descriptae, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum AD , AE . *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similibus figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus aequalibus in partibus istis ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur a locis figurarum, ad quae corpora temporibus iisdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

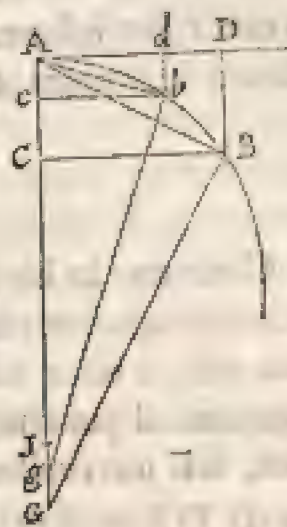
Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Lemma XI.

Subtensa evanescens anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensa arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB , tangens ejus AD , subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD , subtensa arcus AB . Huic subtensae AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG , BG , concurrentes in G ; deim accedant puncta D , B , G , ad puncta d , b , g , sitq; \int intersectio linearum BG , AG ultimo facta ubi puncta D , B accedunt usq; ad A . Manifestum est quod distantia

tia G minor esse potest quam assignata quavis. Est autem
(ex natura circulorum per puncta ABC , Abg transeuntium)
 AB quad. æquale $AG \times BD$ & Ab quad. æ-
quale $Ag \times bd$, adeoq; ratio AB quad. ad
 Ab quad. componitur ex rationibus AG ad
 Ag & BD ad bd . Sed quoniam GC assu-
mi potest minor longitudine quavis assigna-
ta, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus
differat a ratione æqualitatis quam pro
differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio
 AB quad. ad Ab quad. minus differat a ra-
tione BD ad bd quam pro differentia
quavis assignata. Est ergo, per Lemma I,
ratio ultima AB quad. ad Ab quad. æqualis
rationi ultimæ BD ad bd . *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, &
eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoq; ea-
dem ac AB quad. ad Ab quad. *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, tamen anguli D, d
ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem
quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales e-
runt, per Lem. I. & propterea lineæ BD , bd in eadem ratione
ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD , Ad , arcus AB , Ab & e-
orum sinus BC , bc fiant ultimo chordis AB , Ab æquales; erunt
etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD , bd .

Corol. 2. Triangula rectilinea ADB , Adb sunt ultimo in tri-
plicata ratione laterum AD , Ad , inq; sesquuplicata laterum DB ,
 db : Utpote in composita ratione laterum AD & DB , Ad & db
existentia. Sic & triangula ABC , Abc sunt ultimo in triplica-
ta ratione laterum BC , bc .

Corol. 3. Et quoniam DB , db sunt ultimo parallelæ & in du-
plicata ratione ipsarum AD , Ad ; erunt areæ ultimæ curvilineæ

ADB , Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilincorum ADB , Adb , & segmenta AB , Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ arcæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD , Ad , tum chordarum & arcuum AB , Ab .

Scholium.

Ceterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec infinite minorem; hoc est curvaturam ad punctum A , nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum $A\gamma$ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3 : quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci potest, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor prior. Et si fiat DB successive ut AD^2 , $AD^{\frac{1}{2}}$, $AD^{\frac{1}{3}}$, $AD^{\frac{1}{4}}$, $AD^{\frac{1}{5}}$, $AD^{\frac{1}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major prior. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major prior. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{2}{3}}$, $AD^{\frac{1}{2}}$, $AD^{\frac{2}{5}}$, $AD^{\frac{1}{4}}$, $AD^{\frac{1}{3}}$, $AD^{\frac{1}{2}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas &

contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tadium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium Hypothesis; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitarum evanescentium summas & rationes, primasq; nascentium, id est, ad limites summam & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitatem præmittere. His enim idem præstat quod per methodum indivisibilium, & principiis demonstratis jam tutius utimur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summam & rationum limites semper intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Obiectio est, quod quantitarum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitarum evanescentium intelligendam esse rationem quantitarum non antequam evanescent, non postea, sed quacum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Exstat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi.

Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumq; hic limitis sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Obiectio falsæ innititur hypothese. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decreascentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, si quando facili rerum imaginationi consulens, dixerò quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

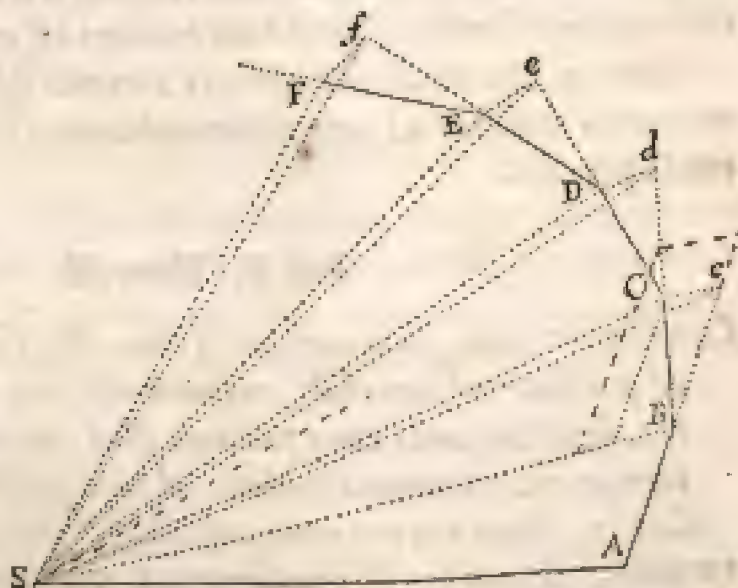
S E C T. II.

De Inventionem Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB . Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad e , (per Leg. I) describens lineam Be æqualem ipsi AB , adeo ut radiis AS , BS , eS ad centrum actis, confectæ forent æquales areae ASB , $BS e$. Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta Be deflectere & pergere in recta BC . Ipsi BS parallela agatur eC occurrens BC in



C , & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. I) reperietur in C , in eodem plano cum triangulo ASB . Junge SC , & triangulum SCB , ob parallelas SB , eC , æquale erit triangulo SBe , atq; adeo etiam triangulo SAB . Simili argumento si

vis

vis centripeta successive agat in C , D , E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD , DE , EF , &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum SCD triangulo SBC & SDE ipsi SCD & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summa quavis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ADF ; (per Corollarium quartum Lemmatit tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, agat indefinenter; areæ vero quavis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non resistantibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima SAB , SBC , SCD &c. circa punctum immobile S , temporibus æqualibus æqualia describæ, agit in loco B si cundum lineam parallelam ipsi AC (per Prop. 4^a Lib. I Elem. 2. Leg. II.) hoc est secundum lineam

B

BS , & in loco C secundum lineam ipsi dD parallelam, hoc est secundum lineam CS , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S . *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est siue quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, siue moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo S uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S . Porro si vis aliqua agat secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus, sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utrumq; moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; secundum lineas parallelas, perget corpus primum describere circa corpus alterum areas easdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum describere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum radio ad alterum ducto describit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (siue simplici, siue ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et si areae illae sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areae illae temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto describit areas quae, cum temporibus collatae, sunt valde inaequales, & corpus illud alterum vel quiescit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetae ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Vsq; tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (siue immobile siue mobile) centrum dirigitur, circum quod aequabilis est arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, si modo vis centripeta sumatur, quae restat post subtractionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

Quoniam aequabilis arearum descriptio Index est centri quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita sua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni usurpemus in sequentibus aequabilem arearum descriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios.

Corpora B, b in circumferentiis circularum BD, bd gyratione, simul describant arcus BD, bd . Quoniam sola vi insita describerent tangentes BC, bc his arcibus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ

perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circularum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima spatiorum nascentium CD, cd : tendunt vero ad centra circularum per Theor. II, propterea quod arcæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura tkb figuræ DCB similis, & per Lemma V, lineola CD erit ad lineolam kt ut

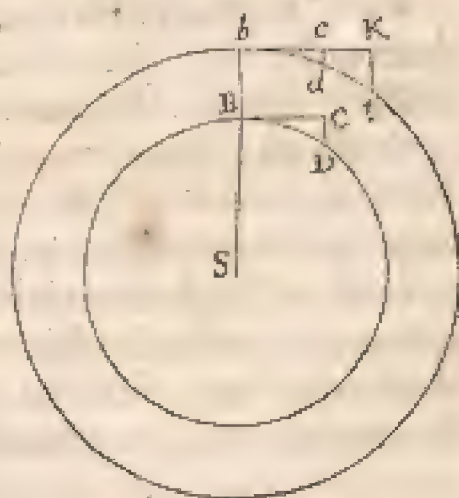
arcus BD ad arcum bt : nec non, per Lemma XI, lineola nascentis tk ad lineolam nascentem dc ut bt quad. ad bd quad. & ex æquo lineola nascentis DC ad lineolam nascentem dc ut $BD \times bt$ ad bd quad. seu quod perinde est, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd \text{ quad.}}{Sb}$, a-

deoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{SB}$) ut $\frac{BD \text{ quad.}}{SB}$ ad $\frac{bd}{Sb}$ quad.

Q. E. D.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circularum.

Corol. 2. Et reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata



plicata ad radios ita sunt hæ vires inter se. Id est (ut cum Geometris loquar) hæ vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse: necnon in ratione composita ex ratione simplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice versa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut radii, vires centripetæ sunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice versa.

facto

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ sunt reciprocæ ut radii, & velocitates æquales: Et vice versa.

et minimum reciprocæ

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi radiorum, vires centripetæ sunt reciprocæ ut quadrata radiorum; velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice versa.

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hunc casus applicata.

Scholium

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cælestibus (ut scorsum colligerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Halleus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decreascentem in duplicata ratione distantiarum a centrīs decrevi fufius in fequentibus exponere.

Porro præcedentis demonstrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum *BD*, impellat ipsum per spatium *CD*, quod ipfo motus initio æquale est quadrato arcus illius *BD* ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem semper plagam con-

continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus idem recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale: adeoq; est ad vim gravitatis ut spatium illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit. Et huiusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt precedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quocunque; Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

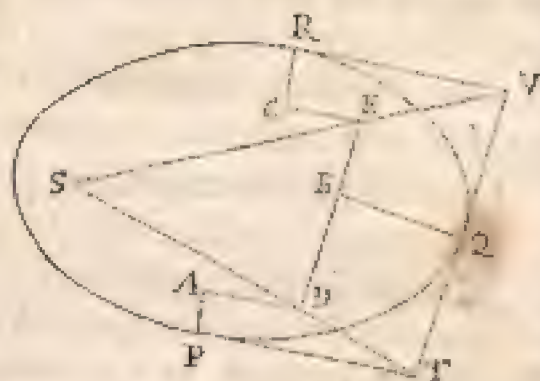
Prop. V. Prob. I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT , TQV , VR in punctis totidem P , Q , R , concurrentes in T & V . Ad tangentes erigantur perpendiculara PA , QB , RC , velocitatibus corporis in punctis illis P , Q , R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P , & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in

in Q . Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentia in $D \& E$: Et adæ TD, VE concurrent in centro quaesito S .

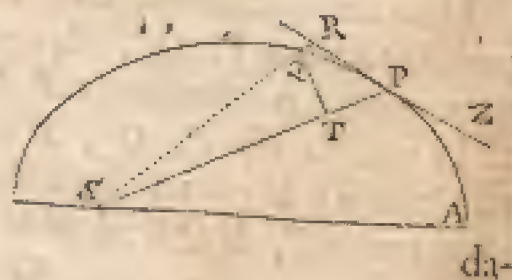
Nam cum corpus in $P \& Q$ radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in $P \& Q$ ductæ respective in perpendiculara a centro in tangentes PT, QT demissa: Erunt perpendiculara illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendiculara AP, BQ directe, id est ut perpendiculara a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S, D, T sunt in una recta. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. $Q. E. D.$



PRO. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S , describat lineam quamvis curvam APQ , tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P , & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantie SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam SP : Dico quod vis centripeta sit reciproce ut solidum $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$, si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta $P \& Q$.

Namq; in figura indefinite parva QRP lineola nascentis QR , dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) &



data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola QR directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ , ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq; vis centripeta ut QR directe atq; $SP \text{ quad. in } QT \text{ quad. inverse}$, id est ut $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$

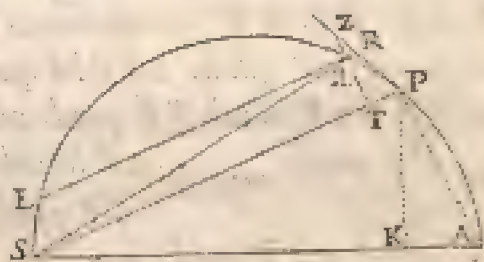
inverse. $Q. E. D.$

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyron faciet. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Est circuli circumferentia $SQP A$, centrum vis centripetæ S , corpus in circumferentia latum P , locus proximus in quem movebitur Q . Ad diametrum SA & rectam SP demitte perpendiculara PK, QT , & per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L & tangenti PR in R , & corant TQ, PR in Z . Ob similitudinem triangulorum ZQR, ZTP, SPA erit $RP \text{ quad.}$ (hoc est QRL) ad $QT \text{ quad.}$ ut $SA \text{ quad.}$ ad $SP \text{ quad.}$ Ergo $\frac{QRL \times SP \text{ quad.}}{SA \text{ quad.}}$ æquatur $QT \text{ quad.}$ Ducantur hæc æqua-



lia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus, scribatur SP pro RL

Sic fiet $\frac{SP \text{ qc}}{SAq}$ æquale $\frac{QTq \times SPq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.)

vis centripeta reciproce est ut $\frac{SP \text{ qc}}{SAq}$, id est (ob datum SA quad)

ut quadrato-cubus distantiae SP. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.

Moveatur corpus in circulo PQA: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes PS, RS ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.

A circuli centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungantur CP. Ob similia

triangula CPM, & TPZ, vel

(per Lem. VIII.) TPQ, est CPq.

ad PMq. ut PQq. vel (per Lem.

VII.) PRq. ad QTq. & ex natura

circuli rectangulum QR x RN

+ QN æquale est PR quadra-

to. Coeuntibus autem punctis

P, Q fit RN + QN æqualis 2PM.

Ergo est CP quad. ad PM quad.

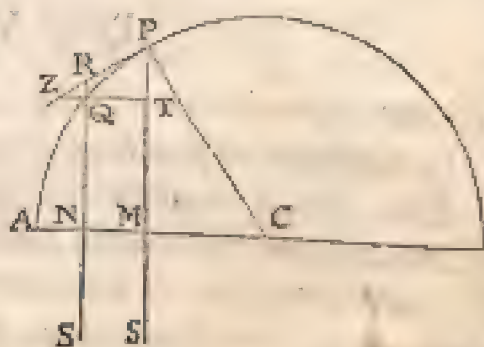
ut QR x 2PM ad QT quad. ade-

oq; $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2PM \text{ cub.}}{CP \text{ quad.}}$ & $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ æquale

$\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$. Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis cen-

tripeta reciproce ut $\frac{2PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$ hoc est (neglecta rati-

one determinata $\frac{2SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$) reciproce ut PM cub. Q. E. J.



Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatum applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in spirali PQS secante radios omnes SP, SQ , &c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

Detur angulus indefinite parvus PSQ , & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio

$\frac{QT}{RQ}$ estq; $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT , hoc est ut SP . Mutetur jam ut-



cunq; angulus PSQ , & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT . Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ prius,

hoc est ut SP . Quare $\frac{QT \times SP}{QR}$ est ut $SP \text{ cub.}$ id est (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus distantie SP . $Q. E. \text{ } \mathcal{J}$.

Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta esse inter se æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circumscriptis diametros ejus descriptis.

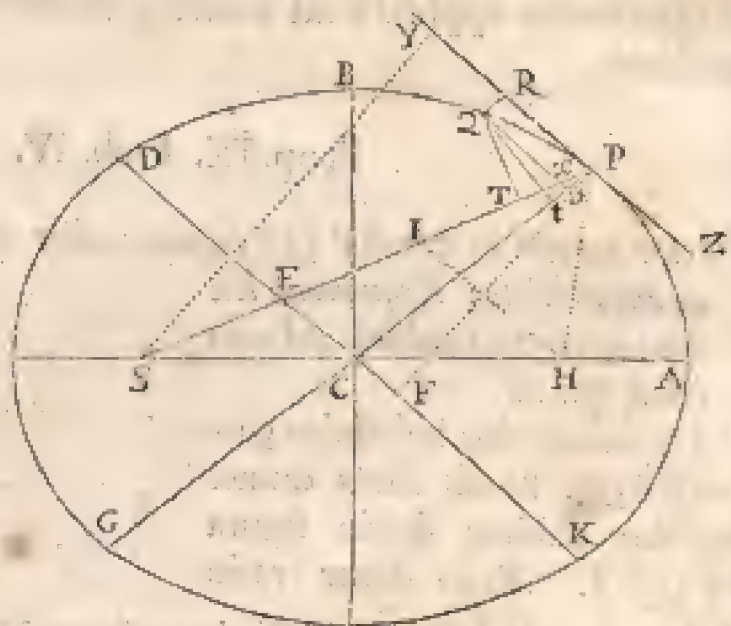
Constat utrumq; ex Conicis.

Propo

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB
semiaxes Ellipseos;
 GP, DK diame-
tri conjugatæ; $PF,$
 Qt perpendiculara
ad diametros; Qv
ordinatum applica-
ta ad diametrum
 GP ; & si complea-
tur parallelogram-
mum $QvRP$, erit
(ex Conicis) PvG
ad Qv quad. ut
 PC quad. ad CD
quad. & (ob simi-
lia triangula Qvt, PCF) Qv quad. est ad Qt quad. ut PC quad.
ad PF quad. & conjunctis rationibus, PvG ad Qt quad. ut PC quad.
ad CD quad. & PC quad. ad PF quad. id est vG ad $\frac{Qt \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC



quad. ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv , & (per Lemma
xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeun-
tibus) $2PC$ pro vG , & ductis extremis & medijs in se
mutuo, fiet $\frac{Qtq \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$ Est ergo (per
Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$, id est

(ob

(ob datum 2 $BCq. \times CAq.$) ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia

PC . *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsis similibus æqualia sunt per *Corol. 3 & 7 Prop. IV* : In Ellipsis autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areae totæ directe & arcarum particulæ simul descriptæ inverse; id est ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse, hoc est ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilei*. Et si Consectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa.

S E C T. III.

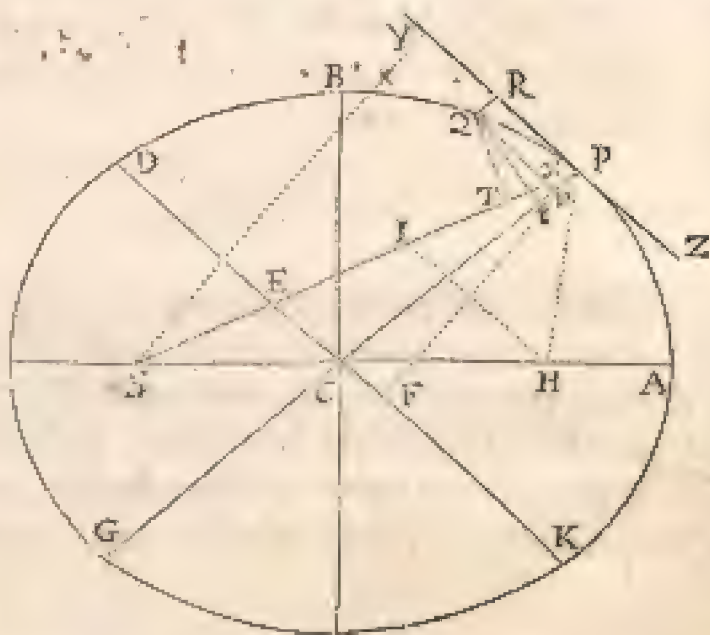
De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipse: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos superioris umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum QxPR. Patet EP æ-

qualem esse semi-axi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquantur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IP R, HPZ) ipsorum PS, PH, quæ



conjunctim axem totum 2 AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipseos latere recto principali (seu 2 BC quad.) dicto L, erit $L \times Qv$ ad $L \times P$ v ut Qv ad P v;

id est ut PE (seu AC) ad PC: & $L \times P$ v ad G v P ut L ad G v; &

& $G \varpi P$ ad $Q \varpi$ quad. ut CP quad. ad CD quad. & (per Lem. VIII.)
 $Q \varpi$ quad. ad $Q x$ quad. punctis Q & P coeuntibus, est ratio aequa-
 litatis, & $Q x$ quad. seu $Q \varpi$ quad. est ad $Q T$ quad. ut EP quad.
 ad PF quad. id est ut CA quad. ad PF quad. live (per Lem. XII.)
 ut CD quad. ad CB quad. Et conjunctis his omnibus rationi-
 bus, $L \times QR$ fit ad $Q T$ quad. ut AC ad $PC + L$ ad $G \varpi + CP q$
 ad $CD q + CD q.$ ad $CB q.$ id est ut $AC \times L$ (seu $2 CB q.$) $\times C-$
 $P q.$ ad $PC \times G \varpi \times CB q.$ live ut $2 PC$ ad $G \varpi$. Sed punctis Q
 & P coeuntibus, aquantur $2 PC$ & $G \varpi$. Ergo & his proportio-
 nalia $L \times QR$ & $Q T$ quad. aquantur. Ducantur haec aequalia in
 $\frac{SP q.}{QR}$ & fiet $L \times SP q.$ aequale $\frac{SP q. \times Q T q.}{QR}$. Ergo (per Corol.

Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SP q.$ id est recipro-
 ce in ratione duplicata distantiae SP . *Q. E. I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabola-
 lam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignita-
 tem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus
 ceteros demonstratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

*Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetae tenden-
 tis ad umbilicum figurae.*

Sunto CA , CB semi-axes Hyperbolae; PG , KD diametri
 conjugatae; PF , $Q \perp$ perpendiculara ad diametros; & $Q \varpi$ ordina-
 tim applicata ad diametrum GP . Agatur SP secans tum diame-
 trum DK in E , tum ordinatim applicatam $Q \varpi$ in x , & comple-
 atur parallelogrammum $QR Px$. Patet EP aequalem esse semi-
 axi transverso AC , eo quod, acta ab altero Hyperbolae umbilico
 H linea HI ipsi EC parallela, ob aequales CS , CH , aquantur ES ,
 EI : adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS , PI , id est (ob
 parallelas HI , PR & angulos aequales IPR , HPZ) ipsarum
 PI , PH , quarum differentia axem totum $2 AC$ adaequat. At SP

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

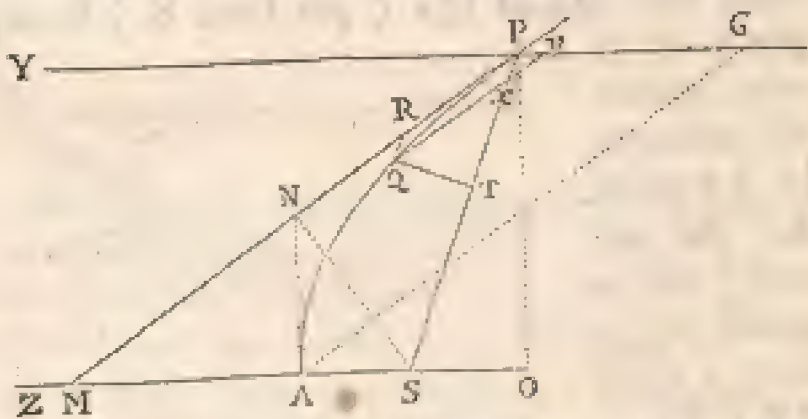
Lemina XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemina XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim APQ Parabolæ, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M , & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.



Jungatur AN , & ob æquales MS & SP , MN & NP , MA & AO , parallelæ erunt rectæ AN & OP , & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A & simile triangulis æqualibus SMN , SPN . Ergo PS est ad SN ut SN ad SA . $Q. E. D.$

Corol. 1. PS est ad SN ut PS ad SA .

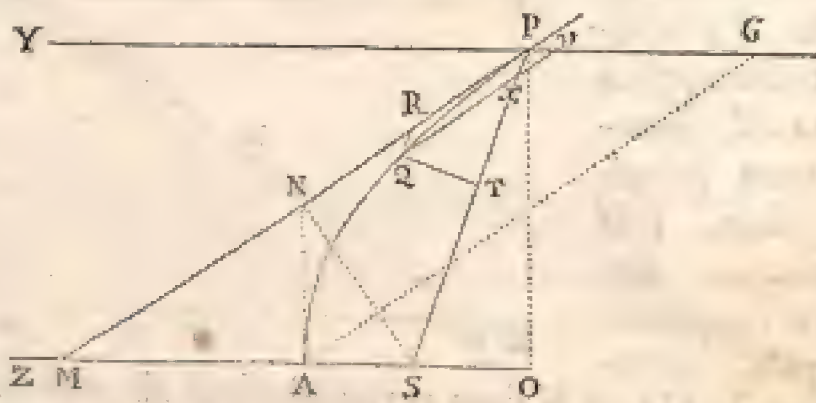
Corol. 2. Et ob datam SA , est SN ut PS .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujuscvis PM cum recta SN quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN , quæ Parabolam tangit in vertice principali. Prop.

Prop. XIII. Prob. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio Lemmatis, sitq; P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP Parallelam QR & perpendicularem QT , necnon Qv tangenti parallelam & occurrentem tum diametro TPG in v , tum distantie SP in x . Jam ob similia triangula Pxv , MSP & æqualia unius latera SM , SP , æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv . Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv , id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4 $PS \times Pv$ seu 4 $PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo Qxq . eo in



catu, æquale
est rectangu-
lo $4 P S \times Q$
 R . Est au-
tem (ob æ-
quales angu-
los $Q \times T$, M
 $P S$, $P M O$)
 $Q \times q$. ad $Q T q$.

ut $PSq.$ ad $SNq.$ hoc est (per Corol. I. Lem. XIV.) ut PS ad AS , id est ut $4PS \times QR$ ad $4AS \times QR$, & inde (per Prop. 9. Lib. V Elem.) $QIq.$ & $4AS \times QR$ aquantur. Ducantur hac aequalia in $\frac{SPq.}{QR}$, & fiet $\frac{SPq. \times QIq.}{QR}$ aequale $SPq. \times 4AS$:

& propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta est reciproce ut $SP^q \times 4AS$, id est, ob datam $4AS$, reciproce in duplicata ratione distantiae SP . Q. E. I.

Carol

Corol. I. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P, secundum lineam quamvis rectam P R, quacumq; cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantie a centro, simul agitur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et si velocitas, quacum corpus exit de loco suo P, ea sit, qua lineola P R in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium Q R: movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione cujus latus rectum est quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo sit ubi lineolæ P R, Q R in infinitum diminuantur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decreseat in duplicata ratione distantiarum a centro; dico quod Orbium Latera recta sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$ quæ ultimo sit ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima Q R, dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut S P q. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$. hoc est, latus rectum L in duplicata ratione areæ QT x S P. Q. E. D.

Corol. Hinc Ellipsos area tota, eiq; proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione temporis periodici.

Prop.

Prop. XV. Theor. VII.

Hisdem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsis sunt in ratione sesquuplicata transversorum axium.

Namq; axis minor est medius proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & sesquuplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobique dimidiata ratio lateris recti & manebit sesquuplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

* *patet ex Corol.*
6 *Prop. 4.*

Corol.* Sunt igitur tempora periodica in Ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Hisdem positis, & ætis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularium inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Vide Fig. Prop. X. & XI.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendicularum *ST* & velocitas corporis *P* erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens *PR*, id est (ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *ST*) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut *ST* reciproce & *SP* & *QT* directe; estq;

SP x

$SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsae distantiae.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione lateris recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem quae corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias, hoc est (per *Corol. VI. Theor. IV.*) reciproce in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediae proportionales inter distantias & latera recta. Componatur haec ratio inverse cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem vel aequalibus figuris, vel etiam in figuris inaequalibus, quarum latera recta sunt aequalia, velocitas corporis est reciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in dimidiata ratione distantiae corporis ab umbilico figurae, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per *Corol. 2. Lem. XIV.*) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolae est in dimidiata ratione distantiae.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubique est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola ma-

jor quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Theorematis quarti, servatur eadem proportio in omnibus distantis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis est velocitati corporis revolvantis in circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti Sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantie a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit, de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit quæ corpus p in orbita quavis data p q gyre faciat, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam P R exeat corpus P cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coni sectionem P Q. Hanc igitur recta P R tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr orbitam p q in p, & si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendiculara, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Coni sectionis ad latus rectum

um orbitæ datæ, in ratione composita ex duplicatâ ratione perpendicularorum & duplicatâ ratione velocitatum, atq; adeo datur.

Sit istud L . Datur

præterea Coniſec-ti-

onis umbilicus S .

Anguli RPS com-

plementum ad du-

os rectos fiat angu-

lus RPH , & dabi-

tur positione linea

PH , in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpen-

diculo SK , & erecto semiaxe conjugato BC , est $SPq. - 2KPH +$

$PHq.$ (per Prop. 13. Lib. II. Elem.) $= SHq. = 4CHq. = 4BHq.$

$- 4BCq. = SP + PH quad. - L \times SP + PH = SPq. + 2SPH$

$+ PHq. - L \times SP + PH$. Addantur utrobique $2KPH + L \times$

$SP + PH - SPq. - PHq.$ & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2K$

PH , seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L . Unde datur

PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corpo-

ris in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2$

KP , jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS ,

adeoq; figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H , & axe prin-

cipali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut la-

tus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita

erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallel-

um lineæ PK , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc

cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH

ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos

pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqua-

lem differentiæ linearum SP & PH , & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1 Hinc in omni Coniſec-tione ex dato vertice principa-

li D , latere recto L , & umbilico S , datur umbilicus alter H ca-

piendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter la-

tus rectum & $4 DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2 SP$ ad L , in casu hujus Corollarii, sit $DS + DH$ ad DH ut $4 DS$ ad L , & divisim DS ad DH ut $4 DS - L$ ad L .

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , invenietur Orbita expedite, capiendò scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS , in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4 DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exhibet.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia, mutationes continuas in locis intermedijs æstimando.

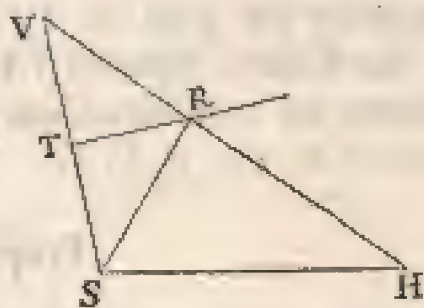
S E C T. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

Lemma XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujuscvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis sit axi transverso figuræ, altera SV a perpendicularo TR in se demisso bisecetur in T; perpendicularum illud TR sectionem Conicam alicubi tangit: & contra, si tangit, erit VH æqualis axi figuræ.

Secet enim VH sectionem conicam in R, & jungatur SR. Ob æquales rectas TS, TV, æquales erunt anguli TRS, TRV. Bilecat ergo R T angulum VRS & propterea figuram tangit: & contra. *Q. E. D.*

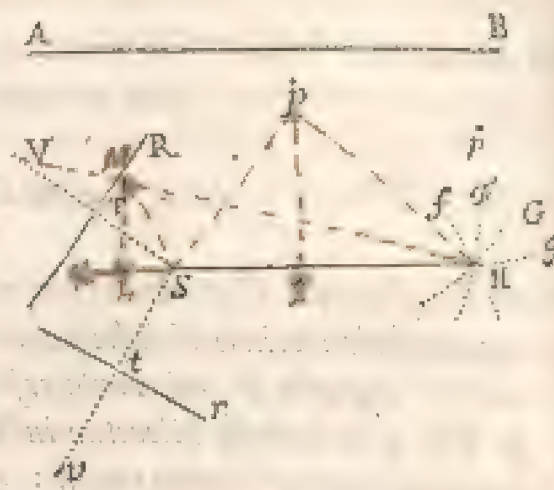


Prop. XVIII. Prob. X.

Dat'is umbilico & axibus transversis describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AC longitudo axis transversæ Trajectoriæ cujuscvis; P punctum per quod Trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, si orbita sit Ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpen-

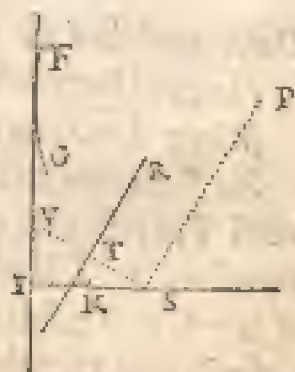
pendiculum ST , & producat eam ad V , ut sit TV æqualis ST ; centroq; V & intervallo AC describatur circulus FH . Hac methode siue dentur duo puncta P, p , siue duæ tangentes TR, tr , siue punctum P & tangens TR , describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H , axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipsi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P , & (per Lemma superius) tanget rectam TR . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p , vel tanget rectas duas TR, tr . Q. E. F.



Prop. XIX. Prob. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ describendæ. Centro P , intervallo PS describe circulum FG . Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST , & produc eam ad V , ut sit TV æqualis ST . Eodem modo describendus est alter circulus fg , si datur alterum punctum p ; vel inveniendum alterum punctum v , si datur altera tangens tr ; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg si dantur duo puncta $P,$



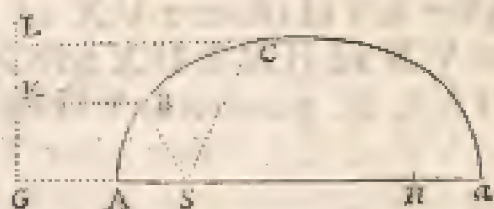
p , vel

p ; vel transeat per duo puncta V, v , si dantur duæ tangentes TR , tr , vel tangat circulum FG & transeat per punctum V , si datur punctum P & tangens TR . Ad FI demitte perpendicularem SI , eamq; biseca in K ; & axe SK , vertice principali K describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales SK & IK , SP & FP transibit per punctum P ; & (per Lemmat. XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR , tanget rectam TR . *Q. E. F.*

Prop. XX. Prob. XII.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quavis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria ABC per puncta duo B, C . Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis transversi ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS , & LC ad CS . Centris B, C , intervallis BK, CL , describe circulos duos, & ad rectam KL , quæ tangat eosdem in K & L , demitte perpendiculum SG , idemq; secæ in A & a , ita ut sit SA ad AG & Sa ad aG , ut est SB ad BK , & axe Aa , verticibus A, a , describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figure descriptæ, & cum sit SA ad AG ut Sa ad aG , erit divisum $Sa - SA$ seu SH ad $aG - AG$ seu Aa in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis transversus figure describenda ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumq; sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc Figura per puncta B, C , ut ex Conicis manifestum est.



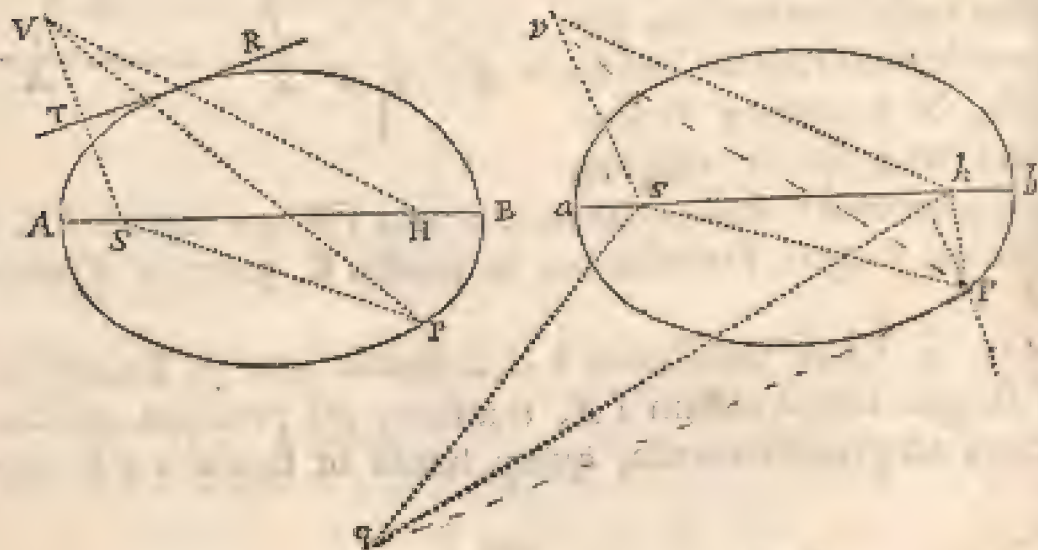
Cas.

Cas. 2. Dato umbilico S , describenda sit Trajectoria quæ rectas duas TR , tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara ST , St & produc eadem ad V , v , ut sint TV , tv æquales TS , ts . Bifeca Vv in O , & erige perpendicularum infinitum OH , rectamq; VS infinite productam secā in K & k ita, ut sit VK ad KS & Vk ad kS ut est Trajectoriæ describendæ axis transversus ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk describatur circulus secans rectam OH in H ; & umbilicis S , H , axe transverso ipsam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam bifeca Kk in X , & junge HX , HS , HV , Hv . Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS ; & composite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimq; ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$ id est ut $2 VX$ ad $2 KX$ & $2 KX$ ad $2 SX$, adeoq; ut VX ad HX & HX ad SX , similia erunt trianguia VXH , HXS , & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH , adeoq; ut VK ad KS . Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis transversus VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH , quam habet Trajectoriæ describendæ axis transversus ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH , vH æquentur axi transverso, & VS , vs a rectis TR , tr perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*



Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam TR tangeret in puncto dato R . In rectam TR demitte perpendiculararem ST , & produc eandem ad V , ut sit TV æqualis ST . Junge VR , & rectam VS infinite productam secā in K & k , ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis transversus ad distantiam umbilicorum; circuloq; super diametro Kk de-

circulum secantem figuram apb in p . Junge sp & age SH quæ sit ad sb ut est SP ad sp , quæq; angulum PSH angulo psb & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Deniq; umbilicis S, H , axe distantiam VH æquante, describatur sectio conica.



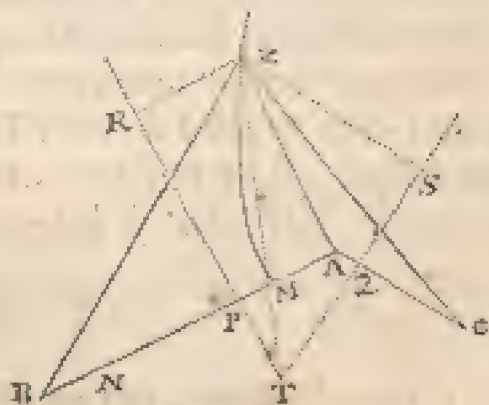
Dico factum. Nam si agatur sw quæ sit ad sp ut est sb ad sq , quæq; constituat angulum osp angulo bsq & angulum osb angulo psq æquales, triangula swb, spq erunt similia, & propterea wb erit ad pq ut est sb ad sq , id est (ob similia triangula VSP, bsq) ut est VS ad SP seu ab ad pq . Æquantur ergo wb & ab . Porro ob similia triangula VSH, osb , est VH ad SH ut wb ad sb , id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sb ; & propterea figura jam descripta similis est figuræ apb . Transit autem hæc figura per punctum P , eo quod triangulum PSH simile sit triangulo psb ; & quia VH æquatur ipsius axi & VS bisecatur perpendiculariter a recta TR , tangit eandem rectam TR . *Q. E. F.*

Lem.

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentie vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunt puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z , quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum AZ, BZ , locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici sunt A & B , & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille MN . Cape PM ad MA ut est MN ad AB , & erecto PR perpendiculari ad AB , demissoq; ZR perpendiculari ad PR , erit ex natura hujus Hyperbolæ ZR ad AZ ut est MN ad AB . Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & axis transversus differentia inter AZ & CZ , duciq; potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS , hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC . Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ , & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; adeoq; rectis RP, SQ concurrentibus in T , locabitur punctum Z in recta TZ positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis transversus differentia rectarum BZ, CZ , inveniri potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum Z in earum interfectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ aquantur, punctum Z locabitur in perpendicularo bisectante distantiam AB , & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

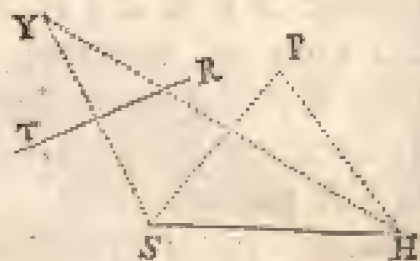
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per *Librum Tacitionum Apollonii a Vieta restitutum.*

Prop. XXI. Prob. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

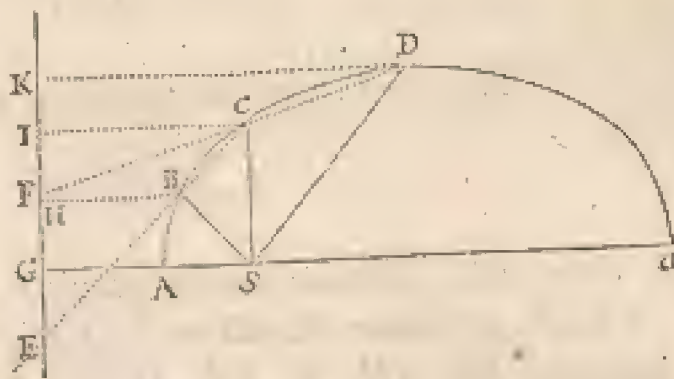
Detur umbilicus S , punctum P , & tangens TR , & invenendus sit umbilicus alter H . Ad tangentem demitte perpendicularum ST , & produc idem ad Y , ut sit TY æqualis ST , & erit YH æqualis axi transverso. Junge SP , HP , & erit SP differentia inter HP & axem transversum. Hoc modo si dentur plures tangentes TR , vel plura puncta P , devenietur semper ad lineas totidem YH , vel PH , a dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atq; adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter H . Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH , vel si Trajectoria Elliptis est, $PH + SP$; sin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D . Junctionas BC, CD produc ad E, F , ut sit EB ad EC ut SB ad SC , & FC ad FD ut SC ad SD . Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH , inq; G sint inire producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut est EB ad BS ; & erit A ver-

vertex, & Aa axis transversus Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA minor, æqualis vel major fuerit quam AS , erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GK cum puncto A ; in secundo casu abeun- in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GK . Nam si demittantur



ad GF perpendiculara CI , DK , erit IC ad HB ut EC ad EB , hoc est ut SC ad SB ; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB , seu GA ad SA . Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B , C , D in Conisectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara a punctis iisdem ad rectam GK demissa in data illa ratione.

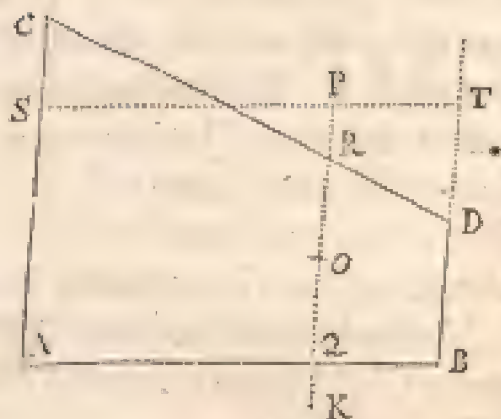
Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

S E C T. V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

Lemma XVII.

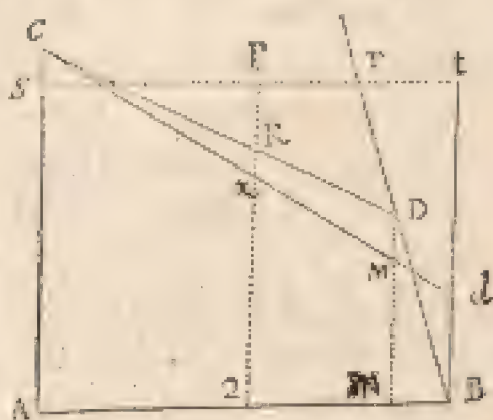
Si a datae conica sectionis puncto quovis P , ad Trapezii alienjus $ABCD$, in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta AB , CD , AC , DB , totidem rectae PQ , PR , PS , PT in datis angulis ducantur, singulae ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita $PS \times PT$ in data ratione.



Cas. I. Ponamus imprimis lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC , & PS ac PT lateri AB . Sintq; insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD , parallela. Et recta quae bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicae sectionis, & bisecabit etiam RQ . Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Producat PO ad K ut sit OK aequalis PO , & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A , B , P & K sint ad Conicam sectionem, & PR secet AB in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in data ratione. Sed QK & PR aequales sunt, utpote aequalium OK , OP , & OQ , OR differentiae, & inde etiam rect-

rectangula PQK & $PQ \times PR$ aequalia sunt; atq; adeo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB , hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t , tum Conicæ sectioni in d . Junge Cd secantem PQ in r , & ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N . Jam ob similia triangula BTt , DBN , est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB . Sic & Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN . Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum Tt in PS , ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB , & (per *Cas. 1*) ita rectangulum QPr est ad rectangulum SPt , ac divisum ita rectangulum QPR est ad rectangulum $PS \times PT$. Q. E. D.



Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor PQ , PR , PS , PT non esse parallelas lateribus AC , AB , sed ad ea utrunq; inclinatas. Earum vice age Pq , Pr parallelas ipsi AC ; & Ps , Pt parallelas ipsi AB ; & propter datos angulos triangulorum PQq , PRr , PSs , PTt , dabuntur rationes PQ ad Pq , PR ad Pr ,



PS ad Ps & PT ad Pt , atq; adeo rationes compositæ PQ in PR ad Pq in Pr , & PS in PT ad Ps in Pt . Sed, per superius demonstrata, ratio Pq in Pr ad Ps in Pt data est: Ergo & ratio PQ in PR ad PS in PT . Q. E. D.

Lem-

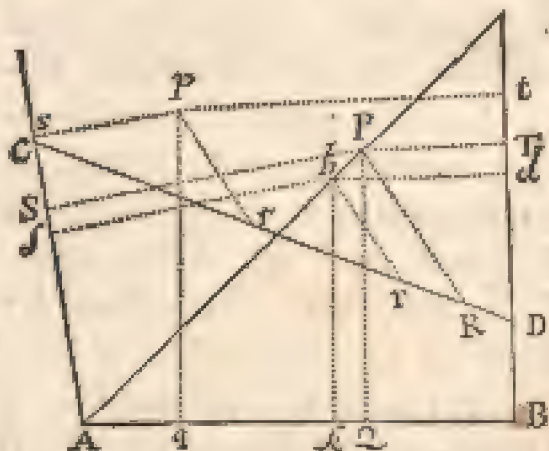
Lemma XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum duëlarum ad opposita duo latera Trapezii $PQ \times PR$ sit ad rectangulum duëlarum ad reliqua duo latera $PS \times PT$ in data ratione; punctum P , a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P , puta p , concipe Conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, iunge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P si fieri potest, puta in b . Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & bk, br, bs, bd ; erit ut $bk \times br$ ad $bd \times bs$ ita (per Lemma XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$ & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem Trapeziorum $bkAs$, $PQAS$, ut bk ad bs ita PQ ad PS . Quare applicando terminos prioris propositionis ad terminos correspondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT . Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db , DP propterea coincidunt. Incidit itaq; b in intersectionem rectarum AP , DP adeoque coincidit cum puncto P . Quare punctum P , ubicunq; sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si rectæ tres PQ , PR , PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC , singule ad singulas, in datis angulis ducantur, sitq; rectangulum sub duabus duëlarum $PQ \times PR$ ad quadratum tertii, PS quad. in data ratione: punctum

Scho-



P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas AB , CD in A & C & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB , CD , AC ; de- in coeat etiam linea PT cum linea PS : & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS quad. rectæq; AB , CD quæ curvam in punctis A & B , C & D secabant, jam Curvam in punctis illis cocuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem Coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. * Nam si punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A , B , C , D junguntur, Conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ , PR , PS , PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuscvis æqualibus, sitq; rectangulum sub duabus ductis $PS \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibuscvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinibus angulorum S , T , in quibus duæ ultimæ PS , PT ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum Q , R , in quibus duæ primæ PQ , PR ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ substitui potest quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor A , B , C , D possunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt,

* Oportet ut
coram quibus huius
demonstratio.

14
99

evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

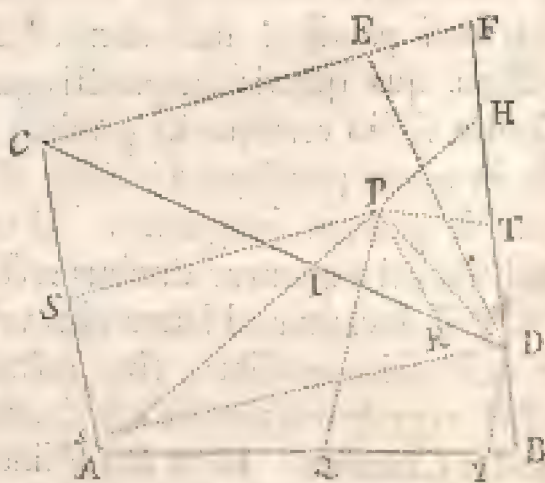
Invenire punctum P , a quo si rectæ quatuor PQ , PR , PS , PT ad alias totidem positione datas rectas AB , CD , AC , BD singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, sit ad rectangulum sub aliis duabus, $PS \times PT$, in data ratione.

Lineæ AB , CD , ad quas rectæ duæ PQ , PR , unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis

A , B , C , D . Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH , in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD , CD , nimirum BD in H & CD in I , & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA ad PS , adeoque ratio PQ ad PS . Auferendo hanc a data

ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT , & addendo datas rationes PI ad PR , & PT ad PH , dabitur ratio PI ad PH atque adeo punctum P . $Q. E. I.$

Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D , tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescientium IP & PH invenietur ut supra. Ipsi igitur AD due parallelam CF , occurrentem BD in F , & in ea ultima ratione sectam in E , &



+ in dato ang.
cum CA & AB.

+ Subducta aq. e
summa $\frac{PS}{PR}$

& DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctum A, B, C, D , puta A , due Loci tangentem AE , & per aliud quodvis punctum B due tangenti parallelam BF occurrentem Loco in F . Invenietur autem punctum F per Lemma superius.

Biseca BF in G , & acta AG diameter erit ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat Loco in H , & erit AH latus transversum, ad quod latus rectum est ut BG q. ad AG .

H . Si AG nullibi occurrit Loco, linea AH existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum

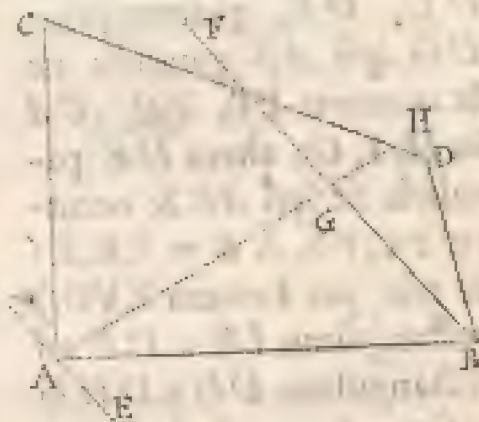
ejus $\frac{BG \text{ q.}}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit,

Locus Hyperbola erit ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G : & Ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper BG quad. æquale rectangulo AGH , quo in casu circulus habebitur.

Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incepti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis $ASPQ$ angulis duobus oppositis A & P tangit sectionem quamvis Conicam in punctis A & P , & lateribus aliis angulorum illorum infinite productis AQ , AS occurrit eidem sectioni Conicæ in B & C ; a punctis autem occur-



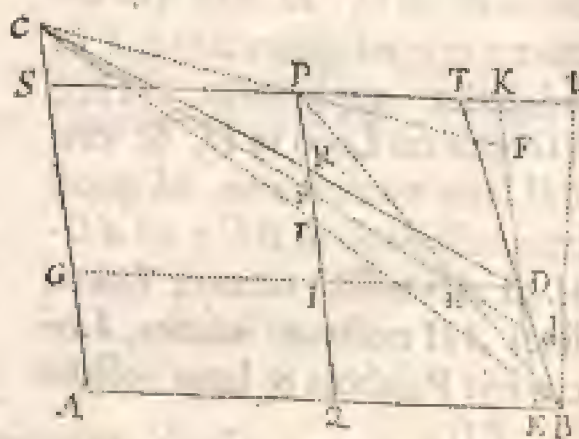
sum B & C ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum D agantur rectæ duæ BD, CD occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus PS, PQ in T & R : erunt semper abscissæ laterum partes PR & PT ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, P, C transeuntem.

Cas. 1. Jungantur BP , CP & a puncto D agantur rectæ duæ
 DG , DE , quarum prior
 DG ipsi AB parallela sit
 & occurrat PB , PQ , CA
 in H , I , G ; altera DE pa-
 rallela sit ipsi AC & occur-
 rat PC , PS , AB in F , K , E :
 & erit (per Lemma XVII.)
 rectangulum $DE \times DF$ ad
 rectangulum $DG \times DH$ in
 ratione data. Sed est PQ
 ad DE seu IQ , ut PB ad
 HB , adeoq; ut PT ad DH ; & vicissim PQ ad PT ut DE ad
 DH . Est & PR ad DF ut KC ad DC , adeoq; ut IG vel PS
 ad DG , & vicissim PR ad PS ut DF ad DG ; & conjunctis
 rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut
 rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atq; adeo
 in data ratione. Sed dantur PQ & PS & propterea ratio PR
 ad PT datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si PR & PT ponantur in data ratione ad invicem, tunc simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, adeoque punctum D (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta $A, B, P, C.$ $Q, E, D.$

Corol. 1. Hinc si agatur BCF

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r , & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR , erit Bt Tangens Coni-



of which some
persons I go
rather in Seaside
at the Trappist.
CPBA supplement
in Seaside in
supplum.

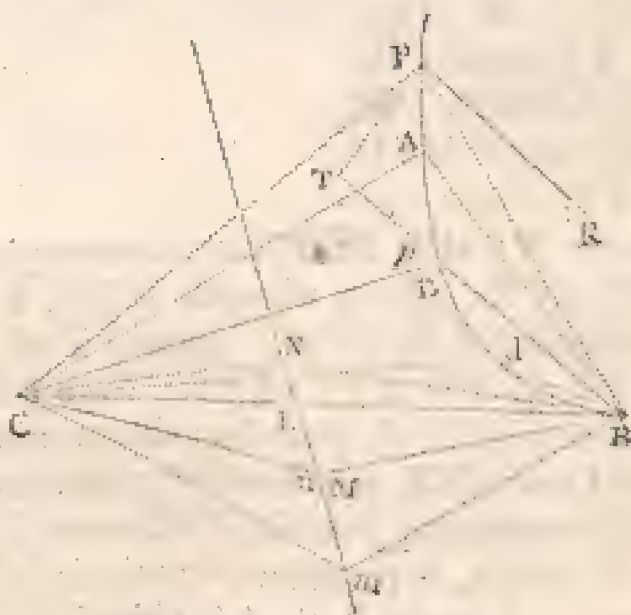
Conicæ sectionis ad punctum B . Nam concipe punctum D coire cum puncto B ita ut, chorda BD evanescente, BT Tangens evadet; & CD ac BT coincident cum CB & Bt .

Corol. 2. Et vice versa si Bt sit Tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum D convenient BD , CD ; erit PR ad PT ut Pr ad Pt . Et contra, si sit PR ad PT ut Pr ad Pt , convenient BD , CD ad Conicæ sectionis punctum aliquod D .

Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, D, P , easq; secet recta BD in punctis D, d , & ipsam PQ secet recta Cd in r . Ergo PR est ad PT ut Pr ad PT , hoc est, PR & Pr sibi invicem æquantur; contra Hypothesin.

Lemma XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM per data puncta B, C , cen polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam MN ; & alie duæ infinitæ rectæ BD, CD cum prioribus duabus ad puncta illa data B, C datos angulos MBD, MCD efficientes ducantur; dico quod hæ duæ BD, CD concursu suo D describent sec-



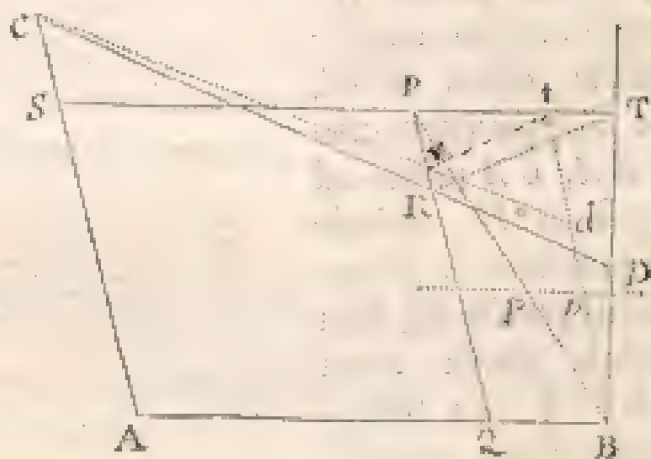
tionem

A ; ubi vero punctum D incidit successive in alia duo quævis sectionis puncta p , P , punctum mobile M incidit successive in puncta immobilia n , N : per eadem n , N agatur recta nN , & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis M . Nam, si fieri potest, versetur punctum M in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum D sectionem Conicam per puncta quinque C , p , P , B , A transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem Conicam per eadem quinque puncta C , p , P , B , A transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum M versari in linea curva absurdum est. *Q. E. D.*

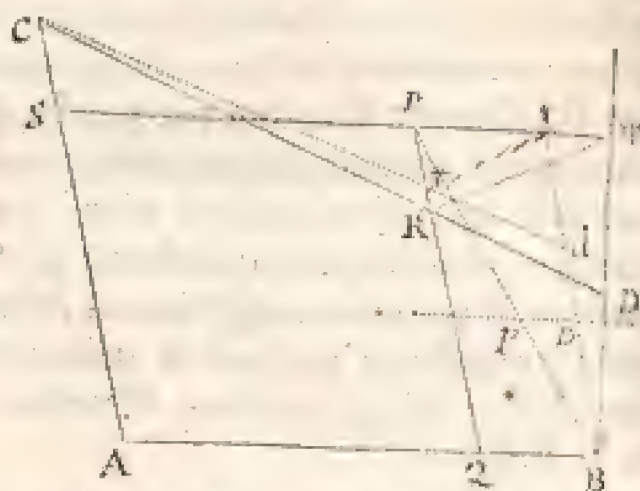
Prop. XXII. Prob. XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A , B , C , D , P . Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B , C , quæ poli nominentur, age rectas AB , AC hisque parallelas TPS , PRQ per punctum quartum P . Deinde a polis duobus B , C age per punctum quintum D infinitas duas BDT , CRD , novissime ductis TPS , PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R . Denique de rectis BT , PR , acta recta tr ipsi TR parallela, abscinde quas-

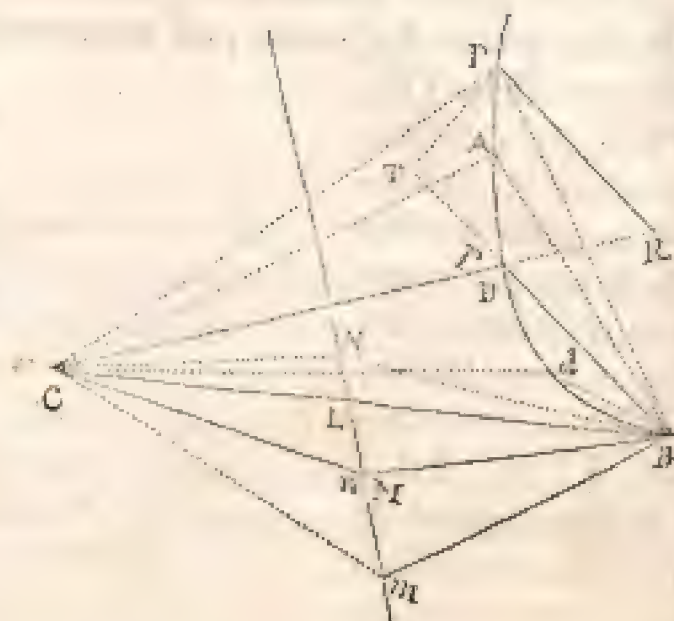


vis Pt , Pr ipsi PT , PR proportionales, & si per earum terminos t , r & polos B , C actæ Bt , Cr concurrant in d , locabitur punctum illud d in Trajectoria quaesita. Nam punctum illud d (per Lem. XX) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor A , B , P , C transeunte; & lineis Rr , Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D . Transit ergo sectio Conica per puncta quinque A , B , C , D , P . *Q. E. D.*



Idem aliter.

E punctis datis junge tria quavis A , B , C , & circum duo eorum B , C ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC , ACB , applicentur crura BA , CA primo ad punctum D , deinde ad punctum P , & notentur puncta M , N in quibus altera crura BL , CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN , &



rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B , C , ea lege ut crurum

crurum BA , CA , vel BD , CD intersecio, ^{super} ~~que~~ ^{transit} d , Tra- ^{transversalis}
jectoriam quaesitam $PADd$ delineabit. Nam punctum d per ^{+ accedat ad A, B}
Lem. XXI continget sectionem Conicam per puncta B , C trans- ^{p puncta, dunt}
euntem & ubi punctum m accedit ad puncta L , M , N , punctum ^{punctum in axe}
 d (per constructionem) accedet ad puncta A , D , P . Describetur ^{lit. ad L, M, N .}
itaq; sectio Conica transiens per puncta quinque A , B , C , D , P . ^{Subtangentia illa}
 $O. E. F.$ ^{d}

Corol. 1. Hinc rectae expedite duci possunt quae trajectoriam in punctis quibuscvis datis B , C tangent. In casu utrovis accedat punctum d ad punctum C & recta Cd evadet tangens quaesita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX

Schol.

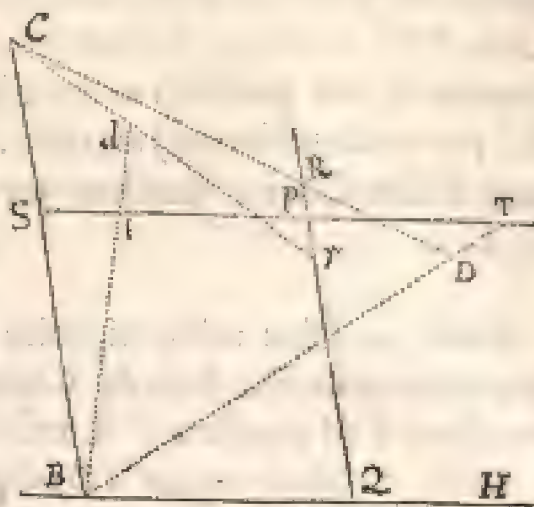
Constructio in casu priore evadet paulo simplicior jungendo BP , & in ea si opus est producta, capiendo Bp ad BP ut est PR ad PT , & per p agendo rectam infinitam pD ipsi SP T parallelam, inq; ea capiendo semper pD aequalem Pr , & agendo rectas BD , Cr concurrentes in d . Nam cum sint Pr ad Pt , PR ad PT , pB ad PB , pD ad Pt in eadem ratione, erunt pD & Pr semper aequales. Hac methodo puncta Trajectoriae inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in casu secundo, describere Mechanice.

Prop. XXIII. Prob. XV.

Trajectoriam describere quae per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

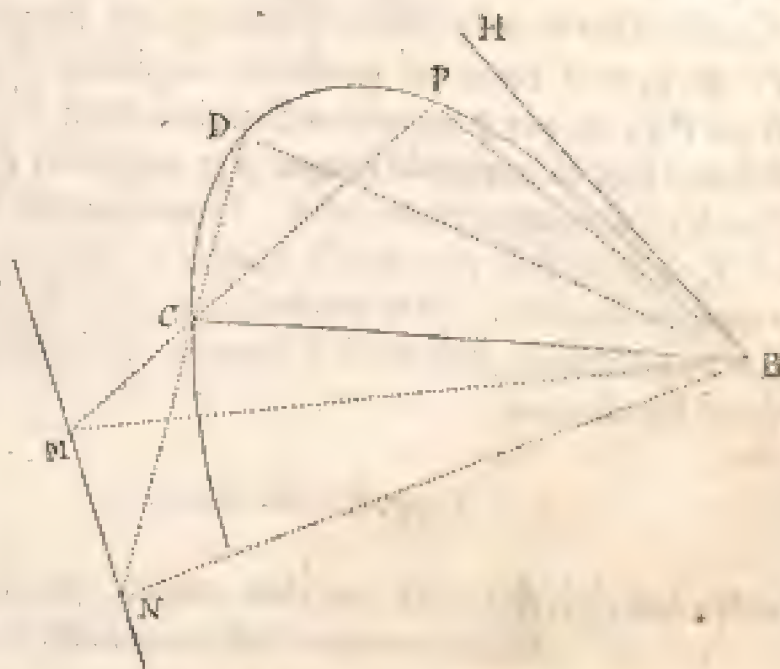
Cas. 1. Dentur tangens HB , punctum contactus B , & alia tria puncta C , D , P . Junge BC , & agendo PS parallelam
M B H

BH , & PQ parallelam BC , comple parallelogrammum $BSPQ$. Age BD secantem SP in T , & CD secantem PQ in R . Deniq; agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ , PS abscinde Pr , Pt ipsi PR , PT proportionales respective; & actarum Cr , Bt concursus d (per Corol. 2. Lem. XX) incidet semper in Trajectoriam describendam.



Idem aliter.

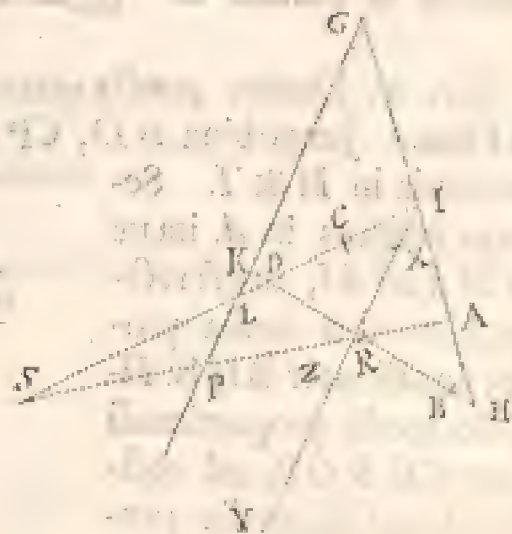
Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B , tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus DC circa polum C . Notentur puncta M , N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurrit cum eodem radio in punctis D & P . Deinde ad actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus CB , & cru-



Prop. XXIV. Prob. XVI.

*Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas
duas positione datas continget.*

Dentur tangentes HI , KL & puncta B, C, D . Age BD tangenti KL concurrentem in punctis H, K , & CD tangenti HI concurrentem in punctis I, L . Aetas ita secæ in R & S , ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD ; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD . Age RS secantem tangentes in A & P , & erunt A & P puncta contactus. Nam si per punctorum H, I, K, L quodvis I agatur recta IY tangenti KL parallela & occurrens curvæ in X & T , & in ea sumatur IZ media proportionalis inter IX & IT : erit, ex Conicis, rectangulum XIY (seu IZ quad.) ad LP quad. ut rectangulum CID ad rectangulum CLD ; id est (per constructionem) ut SI quad. ad SL quad. atq; adeo IZ ad LP ut SI ad SL . Jacent ergo puncta S, P, Z in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in G , erit (ex Conicis) rectangulum XIY (seu IZ quad.) ad IA quad. ut GP quad. ad GA quad., adeoq; IZ ad IA ut GP ad GA . Jacent ergo puncta P, Z & A in una recta, adeoq; puncta S, P & A sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus A & P in recta SR .



Hifce

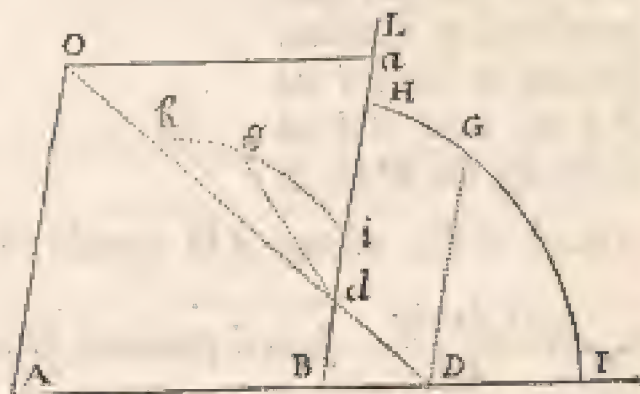
Hiscæ autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A*

& *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*; & a puncto occursum erigatur



recta *gd*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atq; eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *bg* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ & eandem describeret. Distinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *BD* abscissam primam, *Bd* abscissam novam; *O* polum, *OD* radium abscindentem, *OA* radium ordinatum primum & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod si punctum *G* tangit rectam lineam positione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione datam.

Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annu-
mero. Porro si punctum G tangit lineam tertii ordinis Analytici,
punctum g tanget li-
neam tertii itidem or-
dinis; & sic de curvis
lineis superiorum ordi-
num: Lineæ duæ e-
runt ejusdem semper
ordinis Analytici quas
puncta G, g tangunt.
Etenim ut est ad ad
 OA ita sunt Od ad
 OD , dg ad DG , &



AB ad AD ; adeoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$ & DG æqua-

lis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum D tangit rectam lineam, atq;

adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & or-
dinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad uni-
cam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione
 $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD , & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG , producet æquatio

nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tan-
tum dimensionem ascendent, atq; adeo quæ designat lineam rec-
tam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendeant ad
duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg
ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus di-
mensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda &
 AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum
numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt e-
jusdem ordinis Analytici.

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in
figura

figura prima; hæc recta translata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura utraq; Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo AO lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallele sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæsitæ.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet unum earum in circulum. Recta item & sectio Conica in constructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo
data

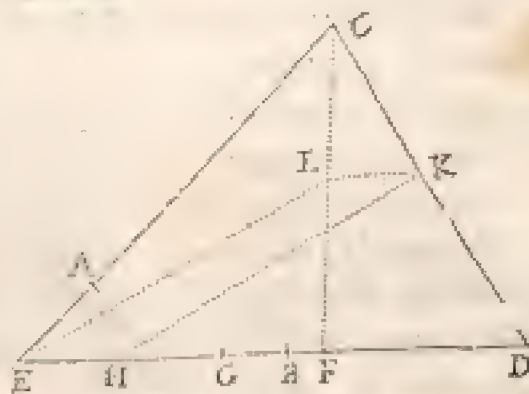
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallele. Sunt illæ bi & kl , ik & bl continentes parallelogrammum $bikl$. Sitq; p punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur pq , & existente Oq æquali Op , erit q punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

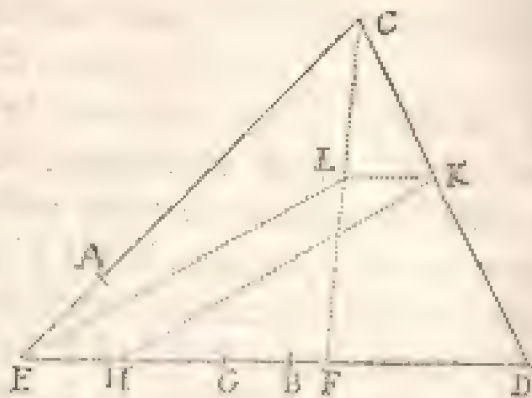
Lemma XXIII.

Si rectæ duæ positione datae AC , BD ad data puncta A , B terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta CD , qua puncta indeterminata C , D junguntur, secetur in ratione data in K : dico quod punctum K locabitur in recta positione data.



Concurrant enim rectæ AC , BD in E , & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC , sitq; FD æqualis EG , & erit EC ad GD ,
N

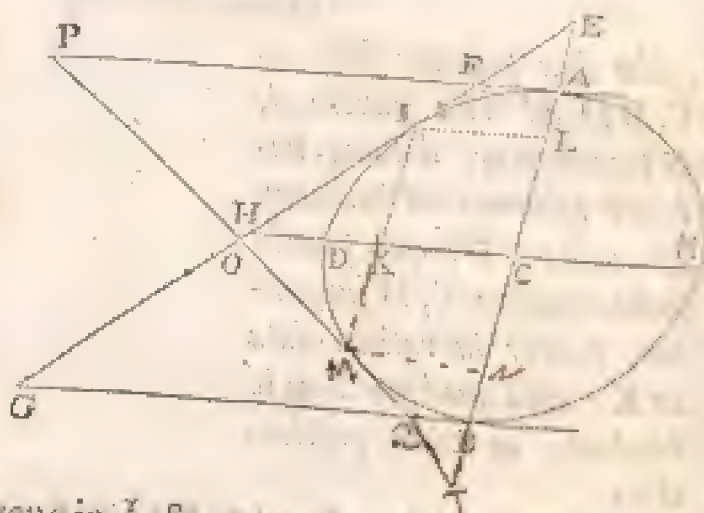
GD , hoc est ad EF ut AC ad BD , adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum EFC . Secetur CF in L in ratione CK ad CD , & dabitur etiam specie triangulum EFL , proindeque punctum L locabitur in recta EL positione data. Junge LK , & ob datam FD & datam rationem LK ad FD , dabitur LK . Huic æqualis capiatur EH , & erit $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi latere positione dato HK . *Q. E. D.*



Lemma. XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque conisectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter bisecet duabus parallelis, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF , GB parallelæ duæ Conisectionem ADB tangentes in A & B ; EF recta tertiâ Conisectionem tangens in I , & occurrens prioribus tangentibus in F & G ; sitque CD semidiameter Figuræ tangentibus parallelis: Dico quod AF , CD , BG sunt continue proportionales. Nam



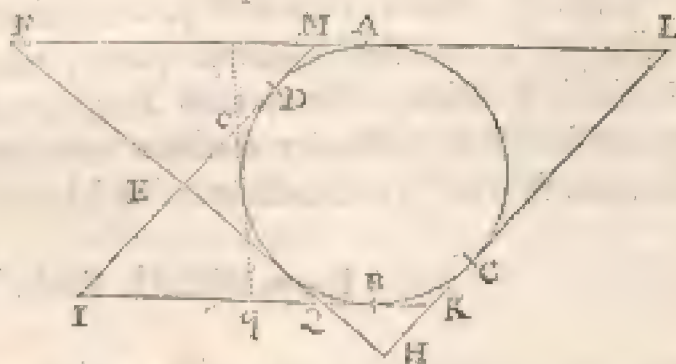
Nam si diametri conjugatæ AB , DM tangenti FG occurrant in E & H , seq; mutuo secant in C , & compleatur parallelogrammum $IKCL$; erit ex natura sectionum Conicarum, ut EC ad CA ita CA ad LC , & ita divisim $EC - CA$ ad $CA - CL$ seu EA ad AL , & composite EA ad $EA + AL$ seu EL ut EC ad $EC + CA$ seu EB ; adeoq; (ob similitudinem triangulorum EAF , ELI , ECH , EBG) AF ad LI ut CH ad BG . Est itidem ex natura sectionum Conicarum LI seu CK ad CD ut CD ad CH , atq; adeo ex æquo perturbate AF ad CD ut CD ad BG , $Q. E. D.$

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ FG , PQ tangentibus parallelis AF , BG occurrant in F & G , P & Q , seq; mutuo secant in O , erit (~~ex æquo perturbate~~) AF ad BQ ut AP ad BG , & divisim ut FP ad GQ , atq; adeo ut FO ad OG .

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ PG , FQ per puncta P & G , F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum A , B transeuntem.

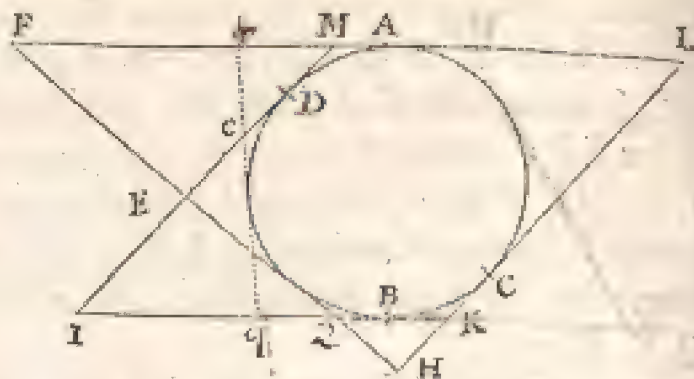
Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvisquintam; sumantur autem abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa unius lateris sit ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abscissam lateris hujus contermini.



Tangant parallelogrammi $MIKL$ latera quatuor ML , IK , $N 2$ KL .

KL, MI sectionem Conicam in A, B, C, D , & secet tangens quinta FQ hæc latera in F, Q, H & E : dico quod sit ME ad MI ut BK ad KQ , & KH ad KL ut AM ad MF . Nam per Corollarium Lemmatis superioris, est ME ad EI ut AM seu BK ad BQ , & componendo ME ad MI ut BK ad KQ . $Q. E.$



$D. \times$ Item KH ad HL ut BK seu AM ad AF , & dividendo KH ad KL ut AM ad MF . $Q. E. D. \times$

Corol. 1. Hinc si parallelogrammum $IKLM$ datur, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum KQH, MFE .

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in e & q , rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$, eritq; KQ ad Me ut Kq ad ME , & divisum ut Qq ad Ee .

Corol. 3. Unde etiam si Eq, eQ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me , transibit eadem recta per medium omnium Eq, eQ, AK ; (per Lemma XXIII) & medium rectæ MK est centrum Sectionis.

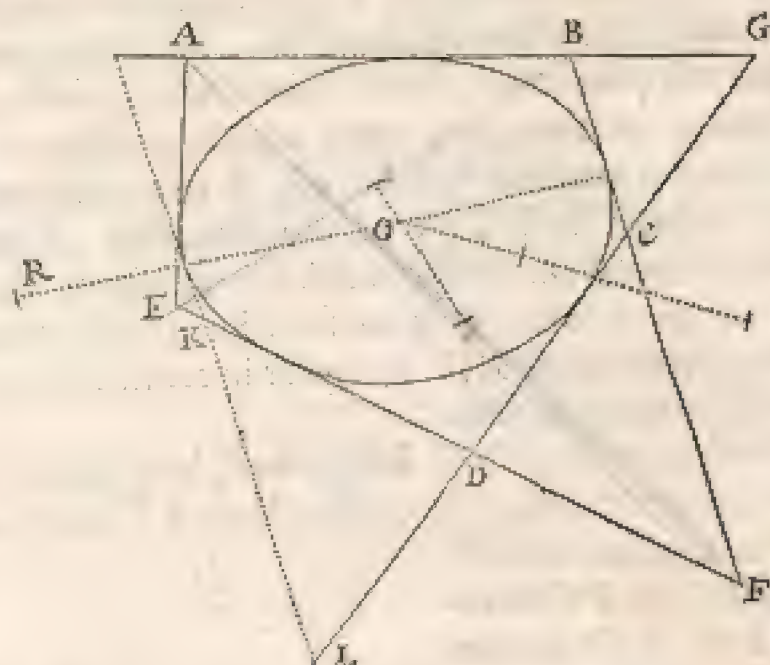
Prop. XXVII. Prob. XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinq; positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, CCD, FDE, EA . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibuscvis contentæ $AB, FE,$

FE diagonales *AF*, *BE* biseca, & (per Cor. 3. Lem. XXV)
 recta per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajec-
 toriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *B G D F*, sub alijs quibusvis

quatuor
 tangenti-
 bus con-
 tentæ, dia-
 gonales
 (ut ita di-
 cam) *B-*
D, *GF* bi-
 seca, &
 recta per
 puncta bi-
 sectionum.
 acta transi-
 bit per cen-
 trum secti-



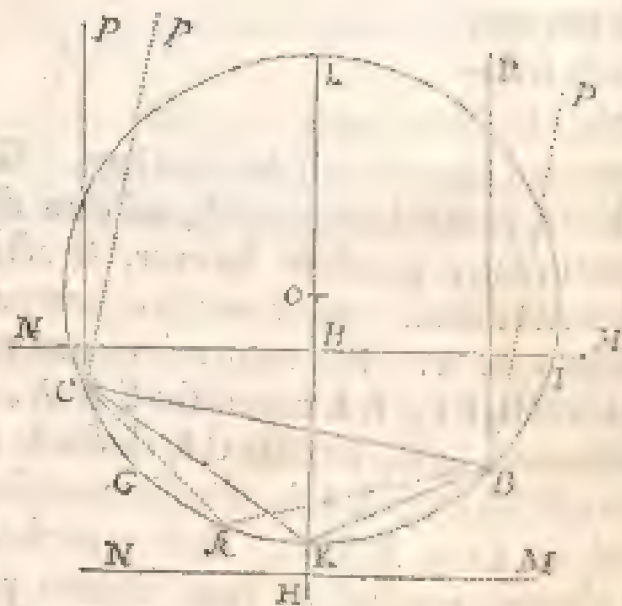
onis. Dabitur ergo

centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cui-
 vis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in
 medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam
 describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *CD*, *FD*.
E in *L* & *K*. Per tangendum non parallelarum *CL*, *FK* cum
 parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* con-
 currentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes
 parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per Co-
 rol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia con-
 tactuum puncta, & tum demum per Casum 1. Prob. XIV.
 Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scho-

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel *Asymptoti*, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliaq; tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. *Asymptotos* autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in *Asymptoton*, atq; constructiones Problematis XV & Casus primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum ubi *Asymptoti* dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium PBN , PCN crura BP , CP quorum concursu Trajectoria describatur sint sibi invicem parallela, cumq; servantia situm revolvantur circa polos suos B , C in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura CN , BN , concursu suo K vel k , circulum $IBKGC$. Sit circuli hujus centrum O .



Ab hoc centro ad Regulam MN , ad quam altera illa crura CN , BN interea concurrebant dum Trajectoria describatur, demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L . Et ubi crura

ra illa altera CK , BK concurrunt ad punctum istud K quod Regula propius est, crura prima CP , BP parallela erunt axi majori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L . Unde si detur Trajectoriae centrum, dantur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH , & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C , B , tertium dabit angulos mobiles PKC , PBK . Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK , centroq; O & intervallo OH describendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quae circulum illum tangat, dabitur regula MN cuius ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione Conica inscribi potest.

Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriae specie datae datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quae datam Coni-sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum biseceretur, punctum bisectionis tangeret aliam Coni-sectionem ejusdem speciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

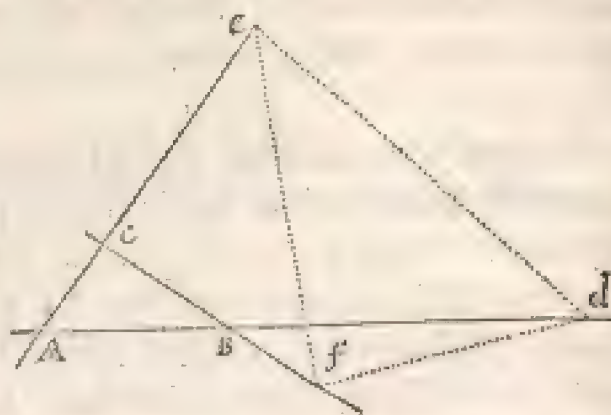
Lemma XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quae non sunt omnes parallelae, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectae infinitae AB , AC , BC , & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB ,
an-

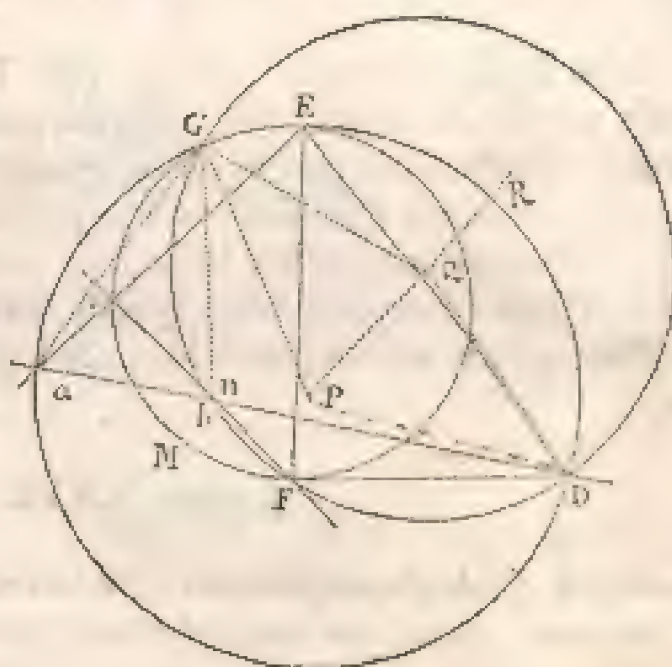
angulus E lineam AC , & angulus F lineam BC tangat. Super DE , DF & EF describe tria circulorum segmenta DRE , DGF , EMF , quæ capiant angulos angulis BAC , ABC , ACB æquales respective.

Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE , DF , EF ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis BAC , literæ $DGFD$ eodem cum literis ABC , & literæ $EMFE$ eodem



cum literis $ACBA$ in orbem redeant: deinde compleantur hæc segmenta in circulos. Secent circuli duo priores se mutuo in G ,

sintq; centra eorum P & Q . Junctis GP , PQ , cape Ga ad AB ut est GP ad PQ , & centro G , intervallo Ga describe circulum, qui secet circulum primum DGE in a . Jungatur tum aD secans circulum secundum DFG in b , tum aE secans circulum tertium GEC in c . Et compleatur figura $abcDEF$ similis & æqualis figuræ $ABCdef$. Dico factum.



Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n . Jungantur aG , bG ,

lG , PD , QD & producat PQ ad R . Ex constructione est
 angulus EaD æqualis angulo CAB , & angulus EeF æqualis an-
 gulo ACB , adeoque triangulum anc triangulo ABC æquiangu-
 lum. Ergo angulus anc seu FuD angulo ABC , adeoque angulo
 FbD æqualis est, & propterea punctum n incidit in punctum
 b . Porro angulus GPQ , qui dimidius est anguli ad centrum G ,
 PD , æqualis est angulo ad circumferentiam GaD ; & angulus G ,
 QR , qui dimidius est complementi anguli ad centrum GQD ,
 æqualis est angulo ad circumferentiam GbD , adeoque eorum com-
 plementa PQG , abG æquantur, suntque ideo triangula GPQ ,
 Gab similia, & Ga est ad ab ut GP ad PQ ; id est (ex construc-
 tione) ut Ga ad AB . Æquantur itaque ab & AB , & propterea
 triangula abc , ABC , quæ modo similia esse probavimus, sunt
 etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli DEF angu-
 li D, E, F trianguli abc latera ab , ac , bc respective, compleri
 potest figura $ABC def$ figuræ $abc DEF$ similis & æqualis, atque
 eam complendo solvetur Problema. $Q. E. F.$

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis
 tribus positione datis interjacebunt. Concipe Triangulum DEF ,
 puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE , DF in di-
 rectum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE , rec-
 tis positione datis AB , AC , & pars data DF rectis positione da-
 tis AB , BC interponi debet; & applicando constructionem præ-
 cedentem ad hunc casum solvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

*Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes
 datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.*

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis lineæ cur-
 væ DEF , quæque a rectis tribus AB , AC , BC positione datis, in
 O par-

*triangle = QPD ob
 ob latera Triang. PQD
 = lateribus Triang.
 PQD singula singulis
 & PQ communibus
 que*

partes datis huius partibus DE & EF similes & æquales secabitur.
Age rectas DE, EF, DF , & trianguli huius DEF pone angu-



los D, E, F ad rectas illas positione datas: (per Lem. XXVI)
Dein circa triangulum describe Trajectoriam curvæ DEF simi-
lem & æqualem. $Q. E. F.$

Lemma XXVII.

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor po-
sitione datas (quæ neq; omnes parallelæ sunt, neq; ad commune
punctum convergunt) singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor ABC, AD, BD, CE , qua-
rum prima secet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C :
& describendum sit Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezio $FGHI$
simile, & cujus angulus f , angulo dato F æqualis, tangat rectam $A-$
 BC , ceteriq; anguli g, b, i ceteris angulis datis G, H, I æquales
tangant ceteras lineas AD, BD, CE respective. Jungatur FH ,
& super FG, FH, FI describantur totidem circulorum segmenta
 FSG, FTH, FVI ; quorum primum FSG capiat angulum æqua-
lem angulo BAD , secundum FTH capiat angulum æqualem an-
gulo CBE ; ac tertium FVI capiat angulum æqualem angulo $AC-$
 E .

E. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG , FH , FI , ut literarum $FSGF$ idem sit ordo circularis qui literarum $BADB$, utq; literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBEC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos, sitq; P centrum circuli primi FSG , & Q centrum secundi FTH . Jungatur & utrinq;

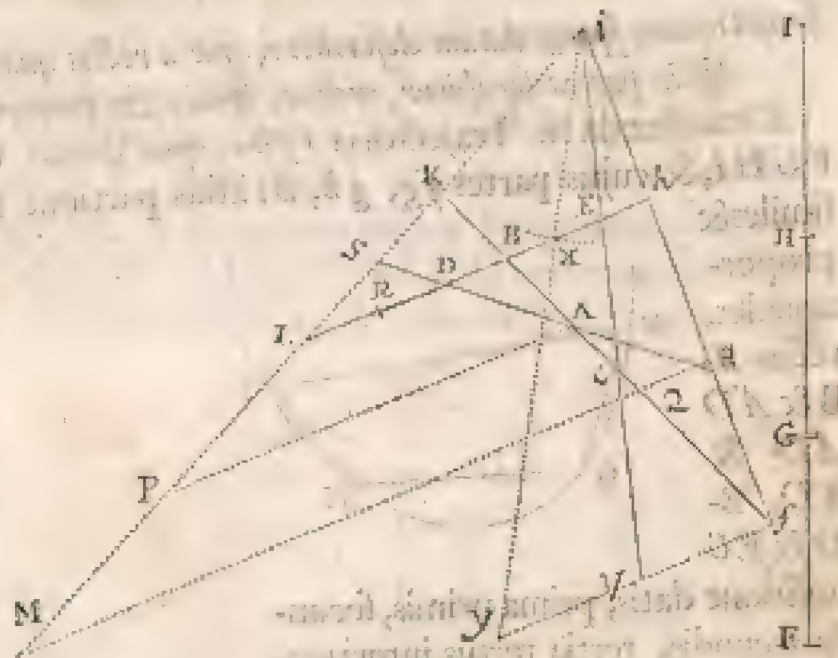


producatur PQ , & in ea capiatur QR in ea ratione ad PQ quam habet BC ad AB . Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo circularis atq; literarum A, B, C : centroq; R & intervallo RF describatur circulus quartus FNe secans circulum tertium FVI in e . Jungatur Fe secans circulum primum in a & secundum in b . Agantur aG, bH, cI , & figuræ $abc FCHI$ similis constituatur figura $ABC fghi$: Eritq; Trapezium $fghi$ illud ipsum quod constituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi FSG, FTH se mutuo in K . Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK & producatur QP ad

Producantur AB ad K , & BD ad L , ut sit BK ad AB ut HI ad GH ; & DL ad BD ut GI ad FG ; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i . Producatur iL ad M , ut sit LM ad iL ut GH ad HI , & agatur tum MQ ipsi LB parallela rectaq; AD occurrens in g , tum gi secans AB , BD in f , b . Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q , & AD rectam KL in S , & agatur AP , quæ sit ipsi BD parallela & occurrat iL in P , & erunt Mg ad Lb (Mi ad Li & gi ad bi , AK ad BK) & AP ad $B-$
 L in eadem



ratione. Secetur DL in R ut sit DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM , AS ad AP , & DS ad DL , erit ex æquo ut gS ad Lb ita AS ad BL & DS ad RL ; & mixtim, $BL - RL$ ad $Lb - BL$ ut $AS - DS$ ad $gS - AS$. Id est BR ad Bb ut AD ad Ag , adeoque ut BD ad gQ . Et vicissim BR ad BD ut Bb ad gQ seu fb ad fg . Sed ex constructione est BR ad BD ut FH ad FG . Ergo fb est ad fg ut FH ad FG . Cum igitur sit etiam ig ad ib ut Mi ad Li , id est, ut IG ad IH , patet lineas FL , fi in g & b , G & H similiter sectas esse. Q. E. F.

In constructione Corollarii hujus postquam ducitur LK secans

E C

CE in i , producere licet iE ad V , ut sit EV ad iE ut FH ad HI , & agere Vf parallelam ipsi BD . Eodem recidit si centro i , intervallo IH describatur circulus secans BD in X , producat iX ad T , ut sit iT æqualis IF , & agatur Tf ipsi BD parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportionibus datas.

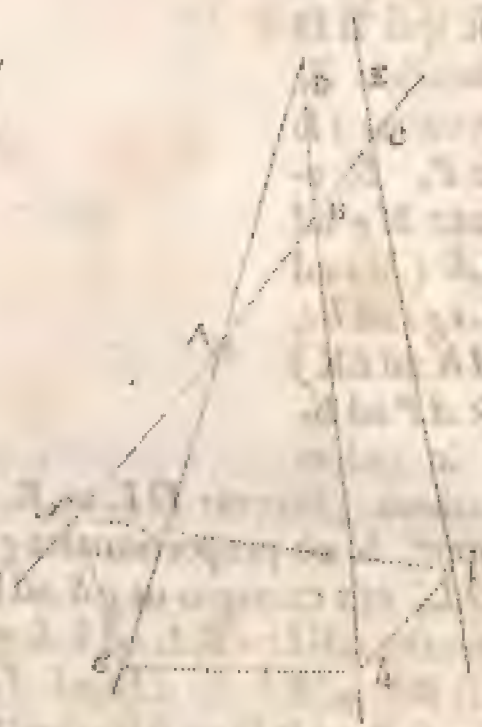
Describenda sit Trajectoria $fgbi$, quæ similis sit lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg , gb , bi illius partibus FG , GH , HI similes &

proportionales, rectis AB & AD , AD & BD , BD & EC



positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjacent. Actis rectis FG , GH , HI , FI , describatur Trapezium $fgbi$ quod sit Trapezio $FGHI$ simile & cujus anguli f , g , b , i tangent rectas illas positione datas AB , AD , BD , CE singuli singulas dicto ordine. Dein (per Lem. XXVII)

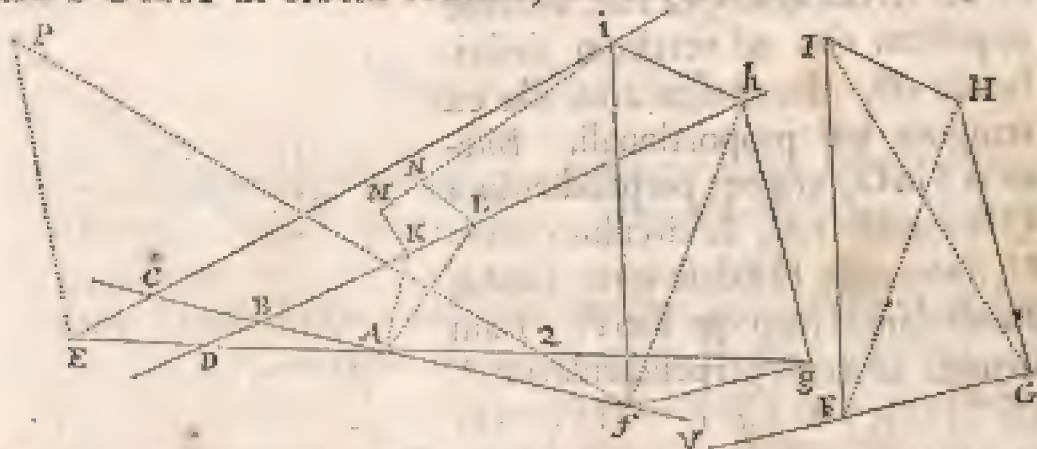
circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ lineæ $FGHI$ consimilis.



Scho-

Scholium.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG, GH, HI, FI produc GF ad V, jungeq; FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrent AK, AL cum recta BD in K & L, & inde agantur KM, LN, quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI, sitq; ad AK ut est HI ad GH; & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI, sitq; ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ CAKMC, ALK, DALND eodem ordine cum literis FGHIF in orbem redeant, & acta MN occurrat rectæ



CE in *i*. Fac angulum *i*EP æqualem angulo IGF, sitq; PE ad Ei ut FG ad GI; & per P agatur *Q*P*f*, quæ cum recta AED contineat angulum *PQE* æqualem angulo FIG, rectæq; AB occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem PE & PQ ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum PE*i*P & PE *Q*P idem sit ordo circularis qui literarum FGHIF, & si super lineâ *fi* eodem quoq; literarum ordine constitutatur Trapezium *fghi* Trapezio FGHIF simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-

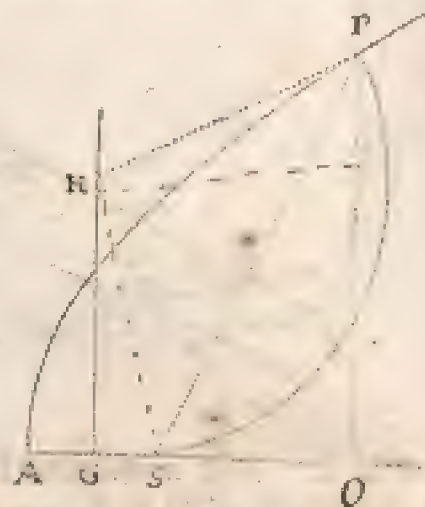
S E C T. VI.

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitq; $\frac{1}{4}AS \times M$ area Parabolica APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit area illa ex tempore ipsi proportionali. Bisecca AS in G, erigeq; perpendicularum GH æquale $\frac{3}{4}M$, & circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quaesito P. Nam demissa ad axem perpendiculari PO, est $HGq. + GSq. (=HSq. = GOq. + HG - POq.) = GOq. + HGq. - 2HG \times PO + POq.$ Et deleta utrinq; $HGq.$ fiet $GSq. = GOq. - 2HG \times PO + POq.$ seu $2HG \times PO (=GOq. + POq. - GSq. = AOq. - 2GAO + POq.) = AOq. + \frac{1}{4}POq.$ Pro $AOq.$ scribe $AO \times \frac{POq.}{4AS}$, & applicatis terminis omnibus ad $3PO$, ductisq; in $2AS$, fiet $\frac{1}{2}GH \times AS (= \frac{1}{2}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ area $APQ - SPQ) =$ area APS. Sed GH erat $\frac{3}{4}M$, & inde



$\frac{1}{2}HG \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area APS *ovalis* est $4AS \times M$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti G est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam viceversa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis: Jam si area Ovalis per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areae proportionalis est, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem,

adeoq; ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenitur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam invenitur. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quarantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoq; & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertie potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertie potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam solida ad solida. Eadem de causa intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & curvarum tertie potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo intersectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem est lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendicularum, & perpendicularum una cum secante revolvatur circa polum, intersectione spiralis transibunt in se mutuo, quæq; prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoq; una eademq; exhibebit intersectiones

ones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersecutio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla exstat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam, & propterea per descriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudes æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudes quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

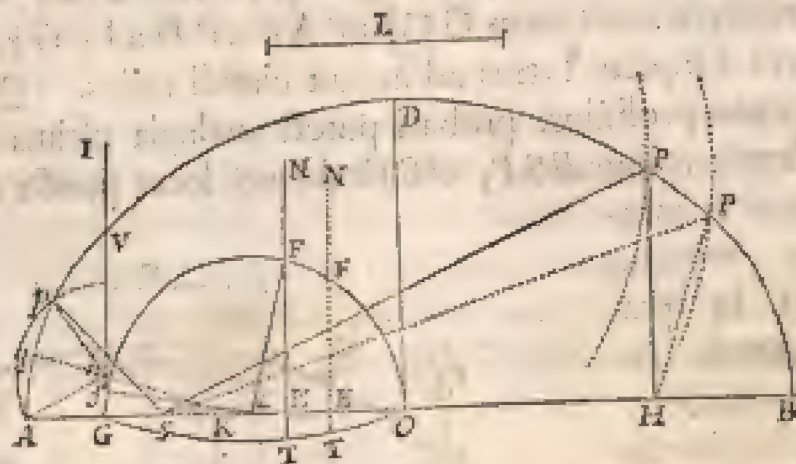
Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, O centrum, sitq; P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G ut sit OG

Scholium.

Cæterum ob difficultatem describendi hanc curvam præstat constructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipseos cujuscvis APB sit AB axis major, O centrum, S umbilicus, OD semiaxis minor, & AK dimidium lateris recti. Secetur AS in G , ut sit AG ad AS ut BO ad BS ; & quaratur longitudo L , quæ sit ad $\frac{1}{2} GK$ ut est AO quad. ad rectangulum $AS \times OD$. Bisecetur OG in C , centroq; C & intervallo CG describatur semicirculus GFO . Deniq; capiatur angulus GCF in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus descripsit arcum quæsitum AP , ad tempus periodicum seu revolutionis unius in



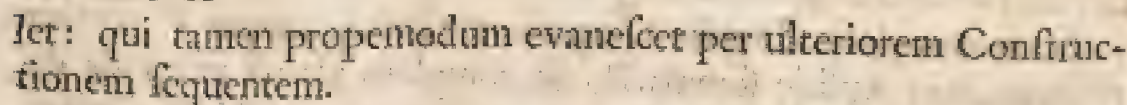
Ellipsi: Ad AO demittatur normalis FE , & producat eadem versus F ad usq; N , ut sit EN ad longitudinem L , ut anguli illius sinus EF ad radium CF ; centroq; N & intervallo AN descriptus circulus secabit Ellipsin in corporis loco quæsito P quam proxime.

Nam completo dimidio temporis periodici, corpus P semper reperietur in Apside summa B , & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apsidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abest ab Apfidibus, ratio prima nascentium sectorum ASP , GCF , & ratio ultimarum evanescentium BSP & OCF , eadem est rationi Ellipseos totius ad circulum totum. Nam punctis

P ,

P, *F* & *N* incidentibus in loca *p*, *f* & *n* axi *AB* quam proximi; ob æquales *An*, *pn*, recta *nq*, quæ ad arcum *Ap* perpendicularis est, adeoq; concurrat cum axe in puncto *K*, bisecat arcum *Ap*. Proinde est: *Ap* ad *Gn* ut *AK* ad *GK*, & *Ap* ad *Gn* ut 2 *AK* ad *GK*. Est & *Gn* ad *Gf* ut *EN* ad *EF*, seu *L* ad *CF*, id est, ut $\frac{GK \times AOq.}{2 AS \times OD}$ ad *CF*, seu *GK* × *AOq.* ad 2 *AS* × *OD* × *CF*,

fatis accurate inventus est. In quadraturis error quasi quingentesimæ partis areæ Ellipseos rotius vel paulo major obvenire so-



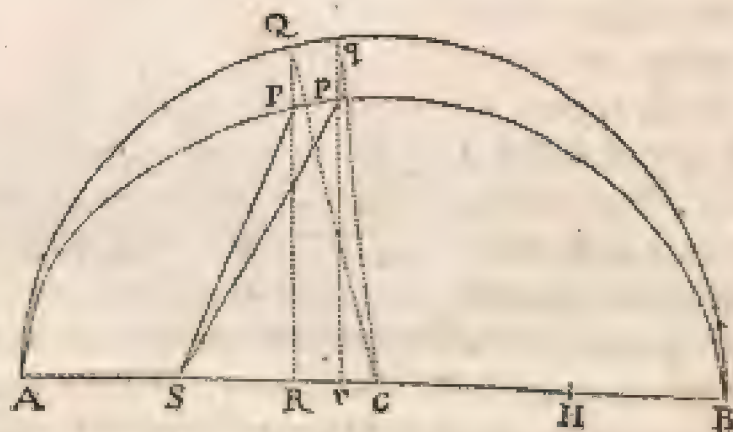
QUIZ-

quærendo ejus punctum aliquod T ; quod constructionem in illo casu accuratam reddet.

Si Ellipseos latus transversum multo majus sit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipseos desideretur, (qui casus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto G rectam GI axi AB perpendicularem, & in ea ratione ad GK quam habet area $AVPS$ ad rectangulum $AK \times AS$; de in centro I & intervallo AI circulum describere. Hic enim secabit Ellipsim in corporis loco quaesito P quamproxime. Et eadem constructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem constructiones demonstrantur ut supra, & si Figura (vertice ulteriore B in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam constructionem Problematis. XXII.

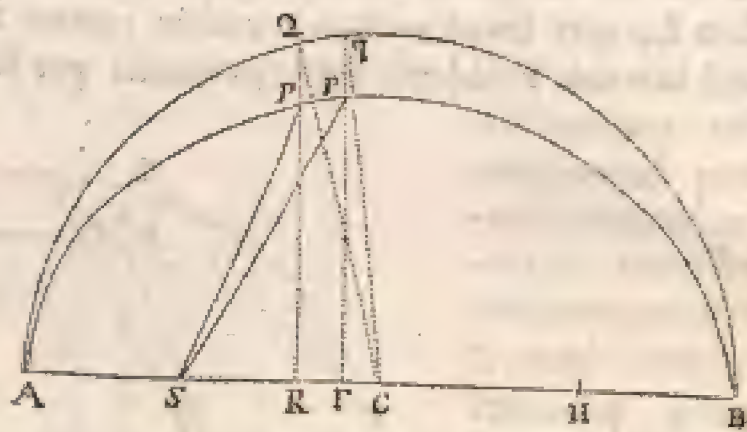
Si quando locus ille P accuratius determinandus sit, inveniaturnum angulus quidam B , qui sit ad angulum graduum $57,29578$ quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB ; tum etiam longitudo quædam L , quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysis.

Per constructionem superiorem (vel utcumq; conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P quam proxime. Demissaq; ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR , ex propor-



tionem diametrorum Ellipseos, dabitur circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ , quæ sinus est anguli ACQ existente

te AC radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos ut est tempus quo corpus descripsit arcum AP , ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N . Tum capiatur & angulus D ad angulum B , ut est sinus iste anguli ACQ ad Radium, & angulus E ad angulum $N - ACQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli $ACQ + \frac{1}{2} D$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B , ut est sinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut est longitudo L ad Longitudinem eandem cosinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2} F$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B , ut est sinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2} H$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus ACQ æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex cosinu ejus Cr & ordinata pr , quæ est ab sinum qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p . Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubiq; mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I , ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negativi

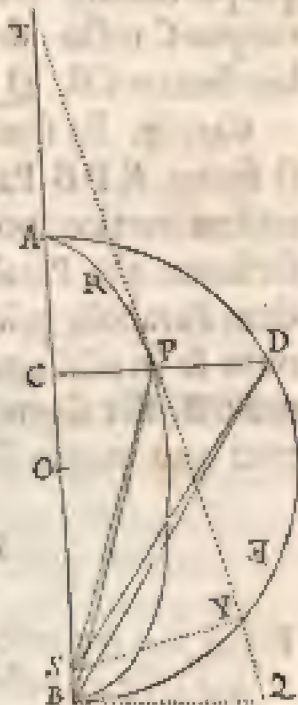


maximam majorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) aequalem; & angulum V (primam medii motus aequationem) ad angulum T (aequationem maximam primam) ut est sinus anguli T duplicati ad radium; atq; angulum X (aequationem secundam) ad angulum Z (aequationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli T duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut est quadratum sinus anguli T ad quadratum Radii. Angulorum T, V, X vel summæ $T + X + V$, si angulus T recto minor est, vel differentia $T + X - V$, si is recto major est rectisq; duobus minor, æqualem cape angulum BHP (motum medium æquatum;) & si HP occurrat Ellipsi in P , acta SP abscindet aream BSP tempori proportionalem quamproxime. Hæc Præxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Invento autem angulo motus medii æquati BHP , angulus veri motus HSP & distantia SP in promptu sunt per methodum notissimam Dris. *Setbi Wardi* Episcopi *Salisburyensis* mihi plurimum colendi,

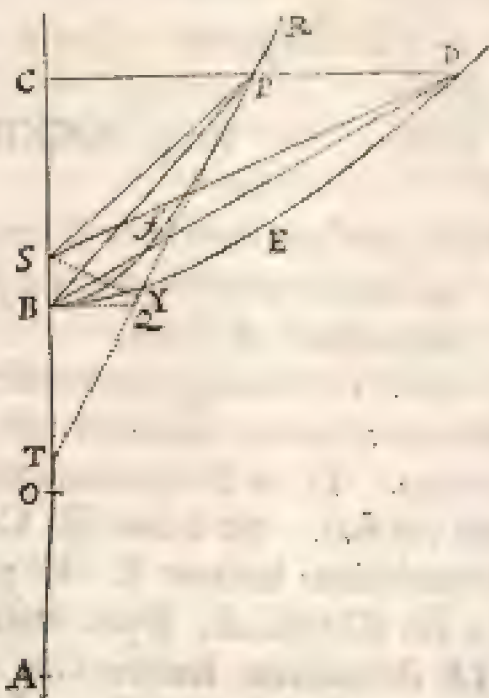
Hæcenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

Prop. XXXII. Prob. XXIV.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propositionibus XI, XII, XIII & earum Corollaris constat. Sit sectio illa Conica $ARPB$ & umbilicus inferior S . Et primo si Figura illa Ellipsis est, super hujus axe majore AB describatur semicirculus ADB , & per corpus decedens transeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisq; DS , PS erit area ASD area ASP atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuat^r perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuat^r latitudo illa in infinitum, & orbe APB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B , descendet corpus in recta AC , & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq; spatium AC , quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capatur area ABD , & a puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC . *Q. E. I.*



Cas. 2. Sin figura superior $R P B$ Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB Hyperbola rectangula BD : & quoniam areae CSP , $CBfP$, $SPfB$ sunt ad areas CSD , $CBED$, $SDEB$, singulae ad singulas, in data ratione altitudinum CP , CD ; & area $SPfB$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum PB , erit etiam area $SDEB$ eodem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolae $R P B$ in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum recta CB , & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum recta BD . Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam CB . *Q. E. I.*



Cas. 3. Et simili argumento si figura $R P B$ Parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia Parabola BED , quæ semper maneat data, interea dum Parabola prior in cuius perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea CB ; fiet segmentum Parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum B . *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in dimidiata ratione quam CA , distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore A , habet ad figuræ semidiametrum principalem AB .

Nam-

Namq; ob proportionales CD , CP , linea AB communis est utriusq; figuræ RPB , DEB diameter. Bifecetur eadem in O , & agatur recta PT quæ tangat figuram RPB in P , atq; etiam fecet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T ; sitq; SY ad hanc rectam & BQ ad

hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ RPB latus rectum ponatur L . Constat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum circulum describentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad SY quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CP q. ut $2AO$ ad L , adeoq; $\frac{2CPq. \times AO}{ACB}$ æquale L . Ergo ve-

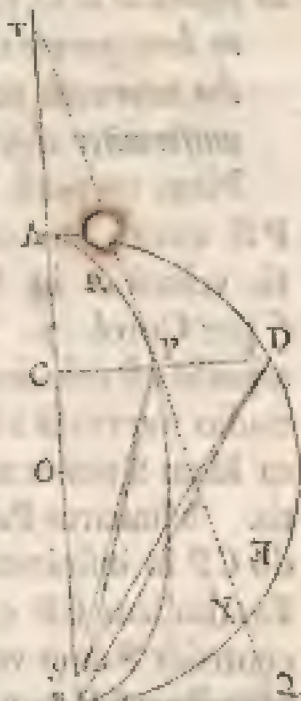
locitates illæ sunt ad invicem in dimidiata ratione $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY quad. Porro

ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO , & composite vel divisim ut CB ad BT . Unde dividendo vel componendo fit $BO -$ uel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT , id est AC ad AO ut CP ad BQ ; indeq; $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur

jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP , sic ut punctum P coeat cum puncto C , punctumq; S cum puncto B , & linea SP cum linea BC , lineaq; SY cum linea BQ ; & corporis jam recta descendens in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in dimidiata ratione ipsius $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad $SYq.$ hoc est (neglectis æqualitatis rationibus

SP ad BC & $BQq.$ ad $SYq.$) in dimidiata ratione AC ad AO .
 $Q. E. D.$

Corol.



ubi corpus versabatur in D ; & si ea sit vis centripeta, ut area $ABGE$ latus quadratum sit ut descendantis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & $V + I$, erit area $ABFD$ ut V^2 , & area $ABGE$ ut $V^2 + 2VI + I^2$, & divisim area $DFGE$ ut $2VI + I^2$, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2I \times V + I^2}{DE}$, id est, si primæ nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2I \times V}{DE}$,

adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus cadendo describit lineolam DE , ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estq; vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF . Ergo vis ipsi DF proportionalis facit corpus ea cum velocitate descendere quæ sit ut area $ABGE$ latus quadratum $Q. E. D.$

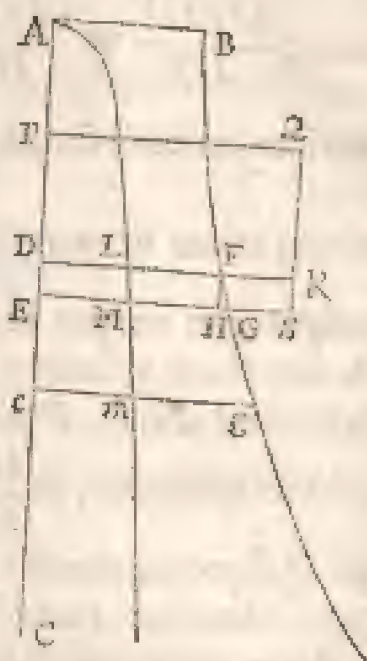
Porro cum tempus, quo qualibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas, adeoque ut area $ABFD$ latus quadratum inverse; sitq; DL , atq; adeo area nascentis $DLME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME . $Q. E. D.$

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D , & in perpendiculari DF capiatur DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D , & compleatur rectangulum $PDRQ$, eiq; æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo

$EDRS$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2V \times I$, adeoque ut V ad I , id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est ut ordinatim applicatæ DF, DR , adeoque ut areæ nascentes $DFGE, DRSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABFD, PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e , erigendo ordinatam eg , & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, si locus e est loco D inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius $PQRD$, id est ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad \sqrt{PQRD} .

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD + \text{vel} - DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D , ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in dimidiata ratione PD ad PE , id est (lineola DE jam-



jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE , adeoque ut rectangulum $2PE \times DL$ ad aream $DLME$; estq; tempus quo corpus utrumq; descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

S E C T. VIII.

De Inventionem Orbium in quibus corpora viribus quibuscunq; centripetis agitata revolvuntur.

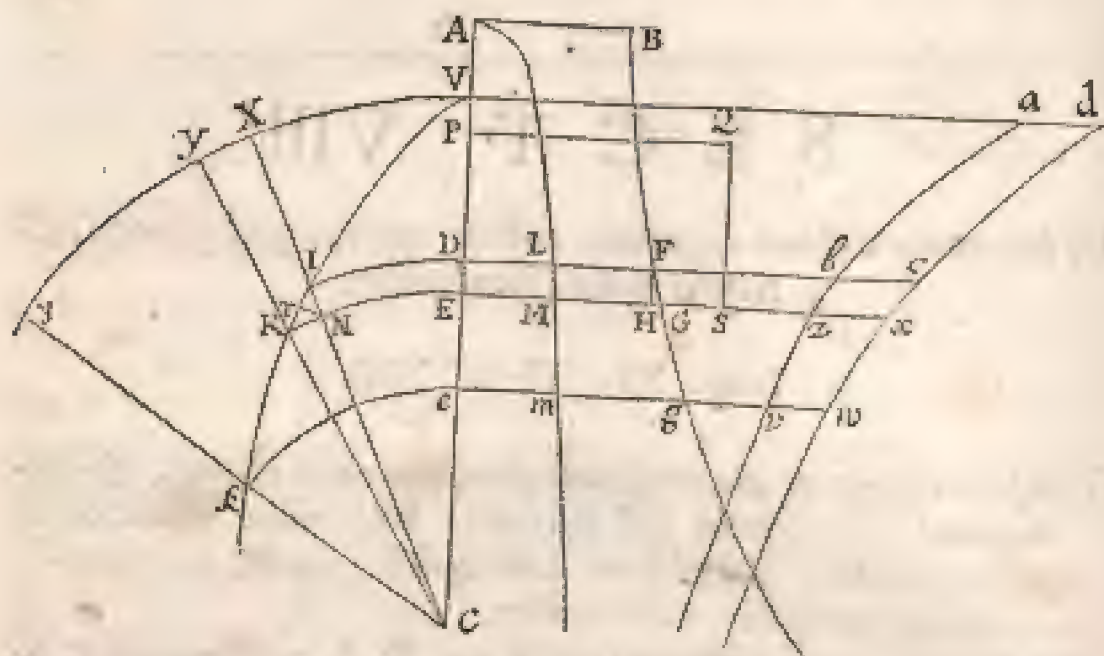
Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcumq;, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D , E , ad centrum C , & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibuscunq; describantur circuli concentrici DI , EK rectæ AC in D & E , curvæq; VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N ; & in IK demittatur perpendicularam NT ; sitq; circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantie CD , CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas DE , IN ; & si vis una IN , per Legum Corol. 2. resolvatur in duas NT & IT , vis NT , agendo secundum lineam

NT

NT corporis cursui *ITK* perpendiculararem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietq; ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITK* & progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus fac-



tæ (si sumantur linearum nascentium DE , IN , IK , IT , NT
 rationes primæ) sunt ut lineæ DE , IT : temporibus autem in
 aequalibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æ-
 qualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ DE & IK , adeoq;
 accelerationes, in cursu corporum per lineas DE & IK , sunt ut
 DE & IT , DE & IK conjunctim, id est ut DE quad. & IT x
 IK rectangulum. Sed rectangulum IT x IK æquale est IN qua-
 drato, hoc est, æquale DE quadrato; & propterea accelerationes in
 transitu corporum a D & I ad E & K æquales generantur. Æ-
 quales igitur sunt corporum velocitates in E & K & eodem ar-
 gu-

gumento semper reperientur aequales in subsequenteribus aequalibus distantis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora aequalia & aequaliter a centro distantia, in ascensu ad aequales distantias aequaliter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine aequales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunq; aequalibus altitudinibus aequales. Namq; impedimento vasis absolute lubrici idem praestatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriae puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitq; quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quaelibet A^{n-1} , cujus Index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{n P^n - n A^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas ascendentis ac descendens (per Prop. XXXIX.) est in hac ipsa ratione.

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriae in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis incientis.

Tendat vis quaelibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VITKk*. Detur circulus *VXY* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroq; eodem describantur alii quivis circuli *ID*,
KE

quale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$.

Unde cum $TX \times XC$ sit ad $A \times KN$ in duplicata ratione TC ad KC , erit rectang. $TX \times XC$ æquale

$\frac{Q \times IN \times \text{CX quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$.

Igitur si in perpendicularo DF capiantur

semper Db , Dc ipsis $\frac{Q}{2 \sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2 AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$

æquales respective, & describantur curvæ lineæ ab , cd quas puncta b , c perpetuo tangunt; deq; puncto V ad lineam AC erigatur perpendicularum Vad abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDdc$, & erigantur etiam ordinatæ Ez , Ex : quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $DbzE$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$, seu triangulo ICK ; & rectangulum $Dc \times IN$ seu $DcxEx$ æquale est dimidio rectanguli TX in CX , seu triangulo XCT ; hoc est, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $DbzE$, ICK , & arearum $VDdc$, VEX æquales semper sunt nascentes particulæ $DExc$, XCT , erit area genita $VDba$ æqualis areae genitæ VIC , adeoq; tempori proportionalis, & area genita $VDdc$ æqualis Sectori genito VEX . Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V , dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI ; & area $VDdc$, eiq; æqualis Sector VEX una cum ejus angulo VCI . Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Incidunt enim Apsides in puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK : id quod sit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoq; ubi area $ABFD$ æqualis est ZZ .

Corol. 2. Sed & angulus KIN , in quo Trajectoria alibi secat lineam illam IC , ex data corporis altitudine IC expedite invenitur;

nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK , id est ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur sectio quælibet Conica VRS , & a quovis ejus puncto R agatur Tangens RT occurrens axi infinite producto CV in puncto T ; dein juncta CR ducatur recta CP , quæ æqualis sit abscissæ CT , angulumq; VCP

Sectori VCR

proportiona-

lem constitu-

at; tendat

autem ad

centrum C

vis centripeta

cubo distan-

tia locorum

a centro re-

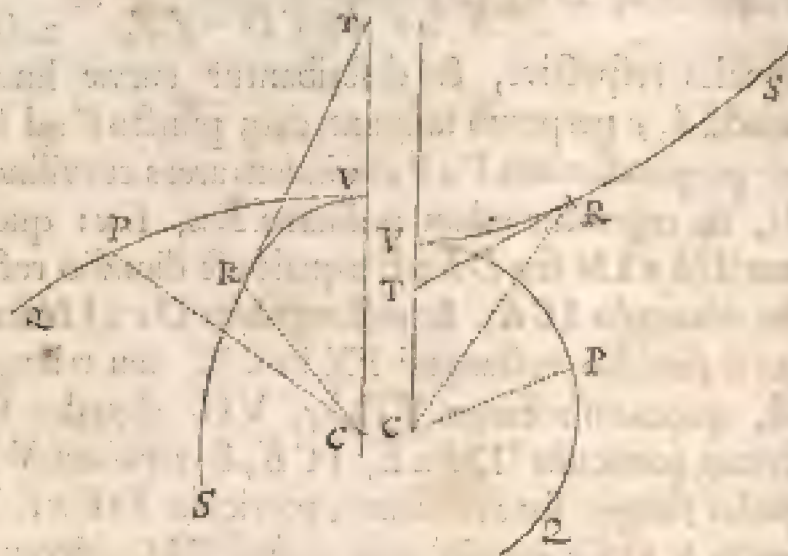
ciproce pro-

portionalis,

& exeat cor-

pus de loco V justa cum velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoque si conica sectio CVR Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco V , & perinde ut in-
experit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique ascendere, figura CVR sit vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum VCP in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam versa, ascendet corpus oblique in Trajectoria VPQ quæ invenitur capiendo angulum VCP Sectori Elliptico CVR proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqualem: ut supra. Consequuntur hæc omnia ex

Pro-



Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem ut satis facilem brevitatis gratia missam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I secundum lineolam IT , ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripetæ, de loco P cadendo acquirere posset in D : sitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum urgetur in I , ut DR ad DF . Pergat autem corpus versus k ; centroq; C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e , & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, abz , & $dexw$ ordinatim applicatæ em , eg , ew , ew . Ex dato rectangulo $PD R Q$, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis XXVII. & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nascentium IK , KN , & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q , una cum curvis lineis abz , $dexw$: adeoq; completo tempore quovis $Dbwe$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck , tum area $Dcwe$, eiq; æqualis Sector XCy , angulusq; XCy & locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunq; quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantis esse undiq; eandem. Atq; hætenus corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

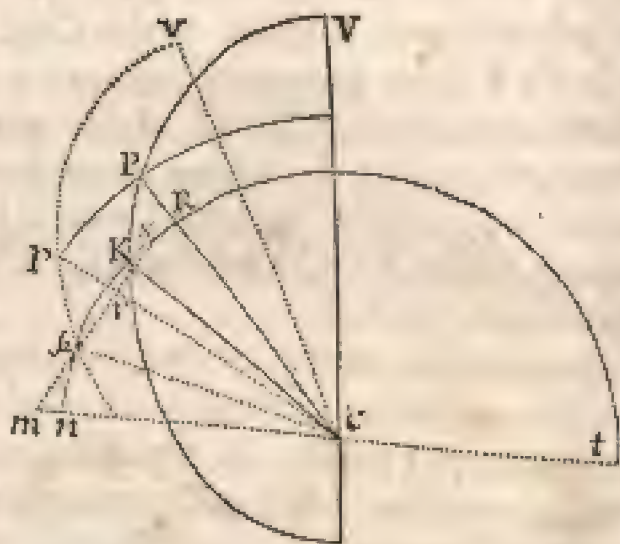
S E C T. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apfidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

*Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacumq; circa centrum viri-
um revolvente perinde moveri possit, atq; corpus aliud in eadem
Trajectoria quiescente.*

In Orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K . A centro C agatur semper Cp , quæ sit ipsi CP æ-
qualis, angulumq; VCp angulo VCP proportionalem constitu-
at; & area quam linea Cp describit erit ad arcam VCP quam li-
nea CP describit, ut ve-
locitas lineæ describen-
tis Cp ad velocitatem li-
neæ describentis CP ; hoc
est, ut angulus VCp ad
angulum VCP , adeoq; in
data ratione, & propte-
rea temporis proportio-
nalis. Cum area tem-
pori proportionalis sit
quam linea Cp in plano
immobili describit, ma-
nifestum est quod cor-
pus, cogente justæ quan-
tatis vi centripeta, revolvī possit una cum puncto p in curva il-
la linea quam punctum idem p ratione jam exposita describit in
plano immobili. Fiat angulus VCv angulo PCp , & linea Cv li-
neæ



neæ CV , atq; figura $\omega C p$ figuræ VCP æqualis, & corpus in p semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis $\omega C p$, eodemq; tempore describet arcum ejus ωp quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP in figura quiescente VPK describere potest. Quærat igitur, per Corollarium Propositionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi possit in curva illa linea quam punctum p describit in plano immobili, & solvetur Problema. Q. E. F.

Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis VP , PK sunt similes & æquales orbis revolventis partes ωp , $p k$. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr , idemq; produc ad m , ut sit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP . Quoniam corporum altitudines PC & pC , KC & kC semper æquantur, manifestum est quod si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC , pC ; alteri prioribus transversæ secundum lineas ipsis PC , pC perpendiculares determinantur) motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P , ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC , id est ut angulus VCp ad angulum VCP . Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroq; pervenit ad punctum K , corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a P versus C , adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr , quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis est; & motu transverso acquirat distantiam a linea pC , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum acquirit a linea PC , ut est hujus motus transversus ad motum
trans-

est lineola nascens mn , eiq; proportionalis viriam differentia reciproce ut cubus altitudinis pC . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k est ad vim qua corpus motu circulari revolvi posset ab r ad k , eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PK , ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est si capiantur datae quantitates F , G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp , ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur Sector circularis aequalis areae toti VPC , quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit, differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta sit area VPC , uniformiter describere potuisset, ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Namq; sector ille & area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK Ellipsis sit umbilicum habens C & Apsidem summam V ; eiq; similis & aequalis ponatur Ellipsis vpk , ita ut sit semper pe aequalis PC , & angulus VCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F ; pro altitudine autem PC vel pe scribatur A , & pro Ellipseos latere recto ponatur $2R$; erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{Acub.}$

& contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem $\frac{Fq.}{Aq.}$, & vis in V erit $\frac{Fq.}{CV quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad distantiam CV ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in V , est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside V , ut dimidium lateris recti Ellipseos ad circuli semidiametrum CV , adeoque valet $\frac{RFq.}{CV cub.}$ & vis qua sit ad hanc ut $Gq. - Fq.$

ad

ad $Fq.$, valet $\frac{RGq. - RFq.}{CV cub.}$: estq; hæc vis (per hujus Corol.

1.) differentia virium quibus corpus P in Ellipsi immota VPK , & corpus p in Ellipsi mobili vpk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad se-

ipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A cub.}$ ad $\frac{1}{CV cub.}$, eadem differentia

in omne altitudine A valebit $\frac{RGq. - RFq.}{A cub.}$. Igitur ad vim $\frac{Fq.}{Aq.}$

qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili VPK , addatur excessus $\frac{RGq. - RFq.}{A cub.}$, & componetur vis tota $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A cub.}$

qua corpus in Ellipsi mobili vpk iisdem temporibus revolvi possit.

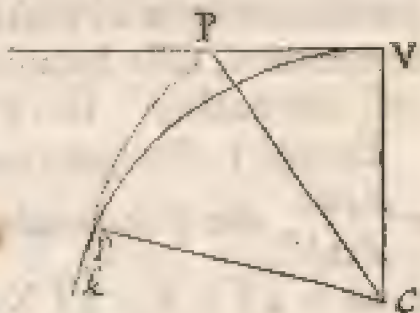
Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis VPK Ellipsis sit centrum habens in virium centro C ; eiq; similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis vpk , sitq; $2R$ Ellipseos hujus latus rectum, & $2T$ latus transversum, atq; angulus VCp semper sit ad angulum $VC P$ ut G ad F ; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{Fq. A}{T cub.}$ & $\frac{Fq. A}{T cub.} + \frac{RGq. - RFq.}{A cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T , & radius curvaturæ quam Orbis VPK habet in V , id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R , & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq; immobili VPK revolvi potest, in loco V dicatur $\frac{Fq.}{Tq.} V$, atq; aliis in locis P indefinite dicatur X , altitudine CP nominata A , & capiatur G ad F in data ratione anguli VCp ad angulum $VC P$: erit vis centripeta qua corpus idem eodem motus in eadem Trajectoria vpk circulariter

riter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium
 $X + \frac{VRGq. - VRFq.}{Acub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immo-
 bili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum
 virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in
 quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur per-
 pendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturq; PC , & ipsi
 æqualis agatur Cp , constituens angulum VCP , qui sit ad angulum
 VCP in data ratione; vis qua corpus
 gyron potest in Curva illa Vpk quam
 punctum p perpetuo tangit, erit reci-
 proce ut cubus altitudinis Cp . Nam
 corpus P , per vim inertiae, nulla alia vi
 urgente, uniformiter progredi potest
 in recta VP . Addatur vis in centrum
 C , cubo altitudinis CP vel Cp reci-
 proce proportionalis, & (per jam de-
 monstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam
 Vpk . Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ
 in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujus-
 modi viribus attracta oblique ascendere.



Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus
 in Ellipti mobili, ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.
 revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis
 cujus Apsides requiruntur, & querendo Apsides orbis quem cor-
 pus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem ac-
 quirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se
 col-

collatae, in aequalibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apfis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV , A pro altitudine quavis alia CP vel Cp , & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{Acub.}$ id est

ut $\frac{Fq. A + RGq. - RFq.}{Acub.}$, substituendo $T - X$ pro A , erit ut

$\frac{RGq. - RFq. + TFq. - Fq. X}{Acub.}$. Reducenda similiter est vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit $Acub.$, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoq; ut $\frac{Acub.}{Acub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut

$\frac{T cub. - 3 Tq. X + 3 TXq. - X cub.}{Acub.}$; & collatis Numeratorum

terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $T cub.$ ut $- Fq. X$ ad $- 3 Tq. X + 3 TXq. - X cub.$ sive ut $- Fq.$ ad $- 3 Tq. + 3 TX - Xq.$ Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob facias R, T æquales, atq; X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt $RGq.$ ad $T cub.$ ut $- Fq.$ ad $- 3 Tq.$ seu $Gq.$ ad $Tq.$ ut $Fq.$ ad $3 Tq.$ & vicissim $G quadrat.$ ad $F quadrat.$ ut $T quad.$ ad $3 T quad.$ id est, ut 1 ad 3; adeoq; G ad F , hoc est angulus VCp ad angulum VCP , ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apfide summa ad Apfidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Abside summa ad Apfidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id
adeo

adeo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbis, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apfidem summam & Apfidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu

103 gr. 55 m. ad centrum; perveniens ab Apfide summa ad Apfidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apfidem summam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum, & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quaelibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T-X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$, fit $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbis ad formam circularem accedunt, fit $RGq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1}$, seu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad nT^{n-1} , & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n ; adeoque G ad F , id est angulus VCP ad angulum VCP , ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus VCP , in descensu cor-

poris ab Apfide summa ad Apfidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180, conficietur angulus VCp , in descensu corporis ab Apfide summa ad Apfidem imam in Orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati $A^n - 3$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apfide ima ad apfidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est ut A seu $\frac{A^1}{A^1}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis 2; adeoq; angulus inter Apfidem summam & Apfidem imam æqualis $2 \times 90^\circ$ gr. seu 90° gr. Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apfidem imam, & completa alia quarta parte ad Apfidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^1}$, erit $n = 2$, adeoq; inter Apfidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127° gr. $17'$ min. & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apfide summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut Latus quadrato - quadratum undecimæ dignitatis Altitudinis, id est reciproce ut A^{-11} , adeoq; directe ut $\frac{1}{A^{11}}$ seu ut $\frac{A^{12}}{A^1}$ erit n æqualis 4, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360° gr. & propterea corpus de Apfide summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apfidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apfidem summam & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibuscvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibuscvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$, id est ut $\frac{b \text{ in } T - X^m + c \text{ in } T - X^n}{A \text{ cub.}}$

seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $\frac{b T^m - m b X T^{m-1} + \frac{m m - m}{2} b X^2 T^{m-2} + c T^n - n c X T^{n-1} + \frac{n n - n}{2} c X^2 T^{n-2} \&c.}{A \text{ Cub.}}$

& collatis numeratorum terminis, fiet $R G q. - R F q. + T F q.$ ad

$b T^m + c T^n$, ut $- F q.$ ad $- m b T^{m-1} - n c T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} X T^{m-2} + \frac{n n - n}{2} X T^{n-2} \&c.$ Et sumendo rationes ultimas

quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $G q.$ ad $b T^{m-1} + c T^{n-1}$, ut $F q.$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, &

vicissim $G q.$ ad $F q.$ ut $b T^{m-1} + c T^{n-1}$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$.

Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T Arithmetice per unitatem, fit $G q.$ ad $F q.$ ut $b + c$ ad $m b + n c$, adeoque ut 1 ad $\frac{m b + n c}{b + c}$. Unde est G ad F , id est angulus $V C p$ ad angulum

$V C P$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{m b + n c}{b + c}}$. Et propterea cum angulus $V C P$ inter

Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 gr.

erit angulus $V C p$ inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqua-

lis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b + c}{m b + n c}}$. Et eodem argumento si vis

centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter Apsides invenietur

$180 \sqrt{\frac{b - n c}{m b - n c}}$ graduum. Nec fecus resolvetur Problema in ca-

sibus

fibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data Numeratoris huius $R G q. - R F q. + T F q. - F q. X$ ad partem non datam in eadem ratione ponenda sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoq; unitatem pro *T*, obtinebitur proportio *G* ad *F*.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur *A*: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{n n}{m m}} - 3$, cujus Index est $\frac{n n}{m m} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deq; Apside discedens, si ceperit descendere, nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usq; ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin ceperit illud de Apside discedens vel minimum ascendere, ascendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in recessu a centro decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut ceperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usq; vel ascendet in infinitum. At si vis in recessu a centro vel decrescat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam descendet ad centrum usq; sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, Vis in recessu a centro aut augebitur, aut in mino-

minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit, hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoq; $\frac{n n}{m m} - 3$ ualeat $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{1}{2} - 3$ vel $\frac{3}{4} - 3$ vel $\frac{5}{4} - 3$, erit vis ut $A^{\frac{1}{4}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{2}} - 3$ vel $A^{\frac{3}{4}} - 3$ vel $A^{\frac{5}{4}} - 3$, id eſt reciproce ut $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{1}{2}$ vel $A^3 - \frac{3}{4}$ vel $A^3 - \frac{5}{4}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam, erit m ad n ut 1 ad 1, adeoq; $A^{\frac{n n}{m m}} - 3$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{A^2}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit, erit m ad n ut $\frac{4}{3}$ vel $\frac{3}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{3}{4}$ ad 1, adeoq; $A^{\frac{n n}{m m}} - 3$ æqualis $A^{\frac{16}{9}} - 3$ vel $A^{\frac{27}{8}} - 3$ vel $A^9 - 3$ vel $A^{16} - 3$, & propterea Vis aut reciproce ut $A^{\frac{9}{16}}$ vel $A^{\frac{8}{27}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13} . Deniq; ſi Corpus pergendo ab Apſide ſumma ad Apſidem ſummam confeſſerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confeſſerit in Conſequentia gradus tres, erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. adeoq; $A^{\frac{n n}{m m}} - 3$ erit æquale $A^{-\frac{1}{363}}$, & propterea Vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{1}{363}}$ ſeu $A^{\frac{1}{363}}$. Decreſcit igitur Vis centripeta in ratione paulo maiore quam duplicata, ſed quæ vicibus 604 propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci poteſt (per Exempla

ter-

tertia) motus Apfidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipfi fit ut $\frac{1}{A^2}$, & vis extranea ablata ut eA , adeoq; vis reliqua ut $\frac{A - eA^2}{A^2}$; erit (in Exemplis tertijs) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apfides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-e}{1-4e}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357, ⁺ vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipfi, id est e esse $\frac{1}{357}$, & $180 \sqrt{\frac{1-e}{1-4e}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{1-\frac{1}{357}}{1-\frac{4}{357}}}$ seu $180, 7602$, id est 180 gr.

45^m. 37^f. Igitur corpus de Apfide summa discedens, motu angulari 180 gr. 45^m. 37^f. perveniet ad Apfidem imam, & hoc motu duplicato ad Apfidem summam redibit: adeoq; Apfis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31^m. 14^f.

Haftenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quasq; tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SEC.

S E C T. X.

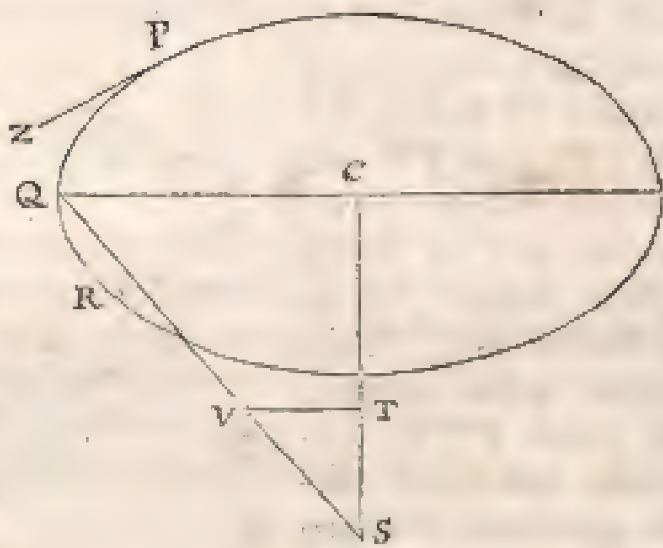
*De Motu Corporum in Superficiebus datis, etq; Funipendulorum
Motu reciproco.*

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Posita cujuscunque generis vi centripeta, datoque tum virium centro tum plano quocunque, in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum Rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, SC distantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ QS , & si in QS capiat SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S , & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T :

Vis SV resolvetur (per
Legum Corol. 2.) in vires ST , TV ; quarum ST trahendo cor-
pus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum
eius in hoc plano. Vis autem altera TV , agendo secundum
positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano
V da-



quovis PQR circa punctum C , atq; in spatiis liberis circa centrum S , adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum C , vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

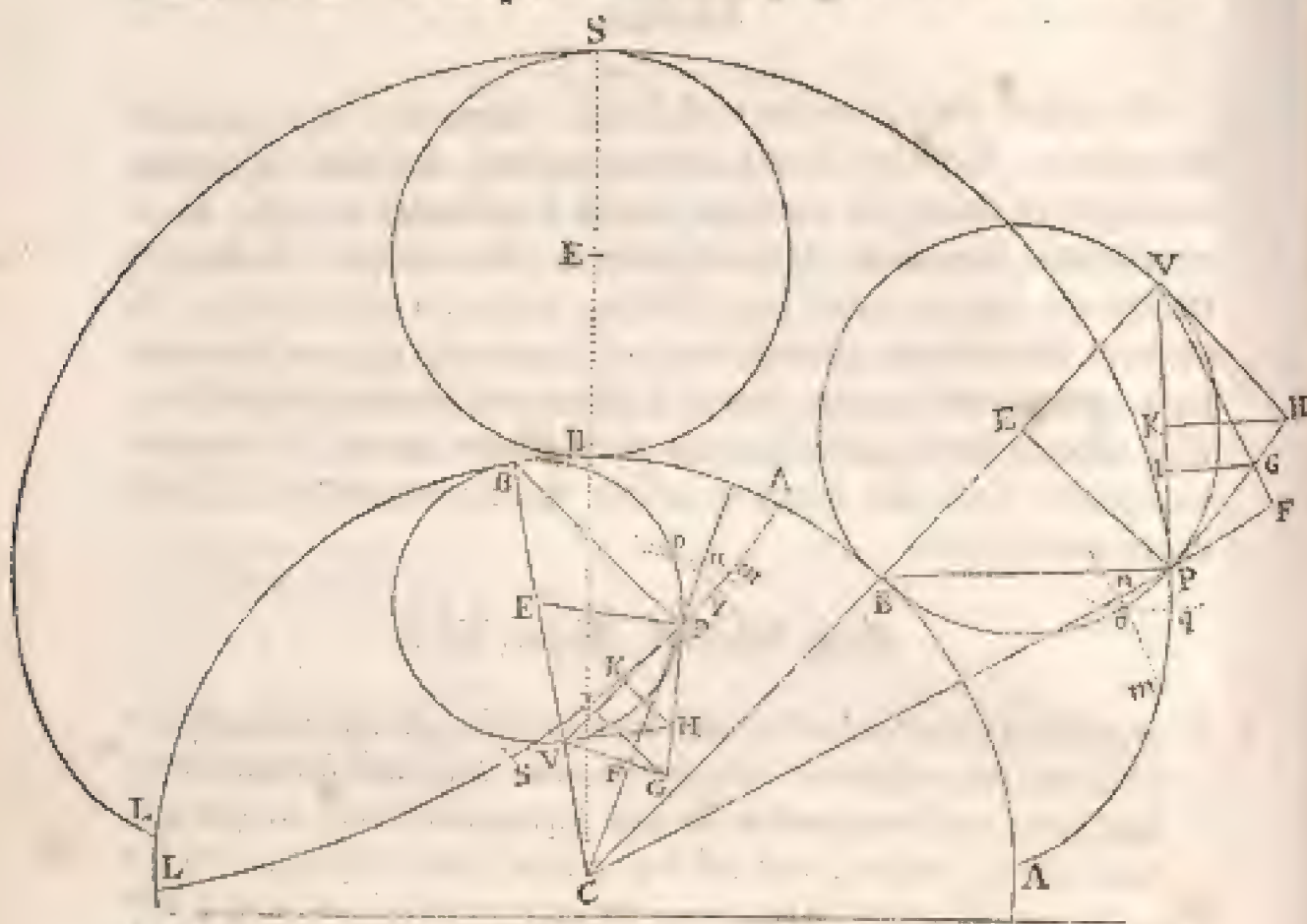
Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & move rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei

quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo



ABL ab A per B versus L , & inter eundem ita revolvi ut arcus AB , PB sibi invicem semper æquantur, atq; punctum illud P in Perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam AP . Sit autem AP via tota curvilinea descripta ex quo Rota globum tetigit in A , & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2CE$ ad CB . Nam recta CE (si
opus

opus est producta) occurrat Rotæ in V , junganturq; CP , BP , EP , VP , & in CP productam demittatur Normalis VF . Tangant PH , VH circulum in P & V concurrentes in H , secetq; PH ipsam VF in G , & ad VP demittantur Normales GI , HK . Centro item C & intervallo quovis describatur circulus nom secans rectam CP in n , Rotæ perimetrum Bp in o & viam curvilineam AP in m , centroq; V & intervallo Vo describatur circulus secans VP productam in q .

Quoniam Rota cundo semper revolvitur circa punctum contactus B , manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad lineam illam curvam AP , quam Rotæ punctum P describit, atq; adeo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P . Circuli nom radius sensim auctus æquetur tandem distantia CP , & ob similitudinem figuræ evanescentis $Pnomq$ & figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evanescentium Pm , Pn , Po , Pq , id est ratio incrementorum momentaneorum curvæ AP , rectæ CP & arcus circularis BP , ac decrementi rectæ VP , eadem erit quæ linearum PV , PF , PG , PI respectivè. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, anguliq; HVG , VCF propterea æquales ; & angulus VHP , (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos,) complet angulum VEP ad duos rectos, adeoq; angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG , CEP ; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP , & ita KI ad KP , & divisim ut CB ad CE ita PI ad PK , & duplicatis consequentibus ut CB ad $2CE$ ita PI ad PV . Est igitur decrementum lineæ VP , id est incrementum lineæ $BV - VP$, ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV - VP$ & AP incrementis illis genitæ sunt in eadem ratione. Sed existente BV radio, est VP cosinus anguli VPB seu $\frac{1}{2}BEP$, adeoq; $BV - VP$ sinus versus ejusdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit $BV - VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versus arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad CB . Q. E. D.

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & biseccetur ea in S , erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP , existente EB radio) ut $2CE$ ad CB , atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad Rotæ diametrum BF ut $2CE$ ad CB .

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa est ut rectangulum BEC , si modo Globi detur semidiameter.

Prop. L. Prob. XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS centro C descriptum detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiiei Globi hinc inde occurrens. Agatur CR biseicans arcum QS in O , & producatuur ea ad A , ut sit CA ad CO ut CO ad CR . Centro C intervallo CA describatur Globus exterior ABD , & intra hunc globum Rota, cujus diameter sit AO , describantur duæ semicycloides AQ , AS , quæ globum interiorem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A . A puncto illo A , filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T , & ita intra semicycloides AQ , AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendicularo AR , filum parte sui superiore AP applicetur ad semicycloidem illam APS , versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteq; reliqua PT cui semicyclois nondum obicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide data QRS . Q. E. F.

Occurrat enim filum PT tum Cycloidi QRS in T , tum circulo QOS in V , agaturq; CV occurrens circulo ABD in B ; & ad fili partem rectam PT , e punctis extremis P ac T , erigantur per-

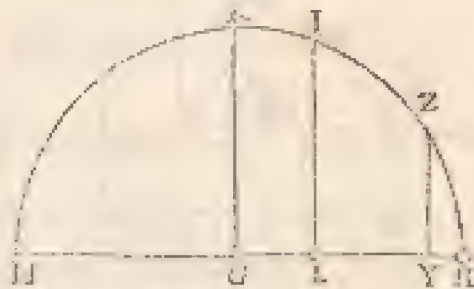
oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS : dico quod oscillationum utrunq; inaequalium aequalia erunt Tempora

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendicularum CX & jungatur CT . Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT , (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX , TX , quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per cujus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX urgendo corpus transversum seu versus X , directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis ut longitudo TX , id est, ob datas CV, WV iisque proportionales TX , TW , ut longitudo TW , hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis TR . Pendulis igitur duabus APT , APT de perpendicularo AR inaequaliter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR , & R . Sunt autem partes sub initio descriptae ut accelerationes, hoc est ut totae sub initio describendae, & propterea partes quae manent describendae & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut totae; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitae & partes his velocitatibus descriptae partesq; describendae, semper ut totae; & propterea partes describendae datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendicularum AR . Cumq; vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R , per eosdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum aequales esse, atq; adeo temporibus aequalibus fieri; & propterea cum Cycloidis partes duae RS & RQ ad utrumq; perpendiculari latus jacentes sint similes & aequales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. E. D.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

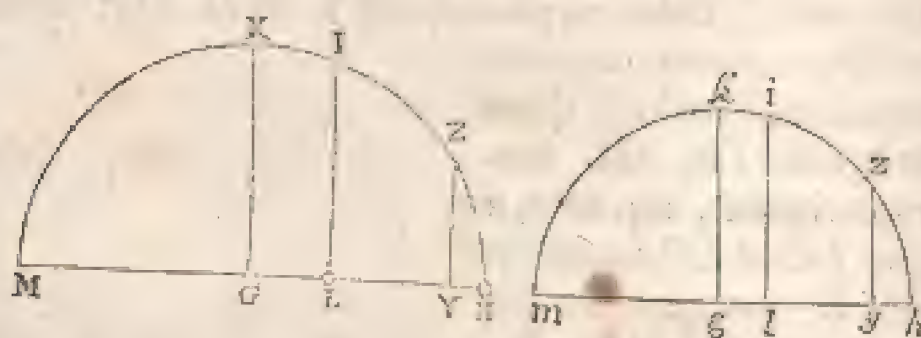
Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G , intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante, describe semicirculum $HKMG$ semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta distantis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum G , sitq; ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS (Vide Fig. Prop. L. & LI.) ad ipsius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S , cadat corpus aliquod L ab H ad G : quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis TR , GL semper proportionales, atq; adeo, si æquantur TR ad LG , æquales in locis T & L ; patet corpora illa describere spatia ST , HL æqualia sub initio, adeoq; subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus describit arcum ST est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad semicirculum HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M) Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R , (hoc est velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G , seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG , arcubus HI , HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK , sive ut $\sqrt{SR} q. - TR q.$ ad SR . Unde cum in Oscillationibus inæqualibus describantur æqualibus temporibus arcus totis Oscillationum arcubus proportionales, habentur ex datis



temporibus & velocitates & arcus descripti in Oscillationibus universis. Quæ erant primo inveniendæ.

Oscillantur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum semiarculus æquales capiantur rectæ GH, gb , centrisq; G, g & intervallis GH, gb describantur semicirculi HKM, bkm . In eorum diametris HM, bm capiantur lineolæ æquales HY, by , & erigantur normaliter TZ, yz circumferentiis occurrentes in Z & z . Quoniam corpora pendula sub initio motus versantur in circumferentia globi QOS , adeoque a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe versus centrum moveri, spatia simul confecta æqualia erunt sub initio. Urgeantur igitur corpora H, b a viribus iisdem in H & b , sintq;



HY, by spatia æqualia ipso motus initio descripta, & arcus HZ, bz denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum nascentium ratio prima duplicata est eadem quæ rectangulorum GHT, gby , id est, eadem quæ linearum GH, gb ; adeoque arcus capti in dimidiata ratione semidiametrorum denotant æqualia tempora. Est ergo tempus totum in circulo HKM , Oscillationi in una Cycloide respondens, ad tempus totum in circulo bkm Oscillationi in altera Cycloide respondens, ut semiperipheria HKM ad medium proportionale inter hanc semiperipheriam & semiperipheriam circuli alterius bkm , id est in dimidiata ratione diametri HM ad diametrum bm , hoc est in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoque tempus illud in Cyclo-

cloide quavis est (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli BEC contenti sub semidiametro Rotæ, qua Cyclois descripta fuit, & differentia inter semidiametrum illam & semidiametrum globi. Q. E. I. Est & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili AR . Q. E. I.

Porro si in globis concentricis describantur similes Cycloides: quoniam earum perimetri sunt ut semidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis sunt ut distantia locorum a communi globorum centro, hoc est ut globorum semidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes similes, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes similes Oscillationibus similibus describuntur, & propterea Oscillationes omnes erunt Isochronæ. Cum igitur Oscillationum tempora in Globo dato sint in dimidiata ratione longitudinis AR , atq; adeo (ob datam AC) in dimidiata ratione numeri $\frac{AR}{AC}$, id est in ra-

tione integra numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$; & hic numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ servata ratione AR ad AC (ut fit in Cycloidibus similibus) idem semper maneat, & propterea in globis diversis, ubi Cycloides sunt similes, sit ut tempus: manifestum est quod Oscillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis sunt ut numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$, id est, in ratione composita ex dimidiata ratione longitudinis fili AR directæ & dimidiata ratione semidiametri globi AC inverse. Q. E. I.

Deniq; si vires absolutæ diversorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde si tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverse, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directæ, & propterea spatia erunt æqualia quæ his temporibus describuntur. Ergo Oscillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunq; cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex di-

mediata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiae inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolutae etiam inverse, id est, si vis illa dicatur V , in ratione numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Q. E. L.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur aequalis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic aequale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Trochoide quavis APS ut $\frac{1}{2}BC$ ad \sqrt{BEC} .

Corol. 2. Hinc etiam constat quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, visq; centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, aequalis evadet quadruplicato sinui vero dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens, ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & aequali Cycloide temporibus aequalibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

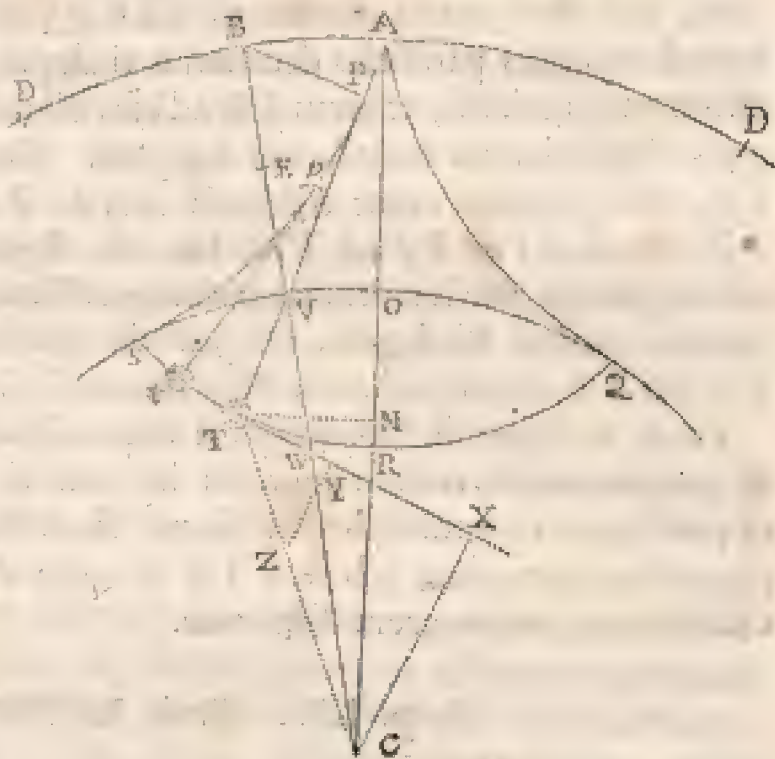
Aprantur autem Propositiones a nobis demonstratae ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ cundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra

intra globos Oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decre-
scit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata
ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione sim-
plici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

*Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires qui-
bus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas
peragent.*

Oscilletur cor-
pus T in curva
quavis linea ST -
 RQ , cujus axis
sit OR transiens
per virium cen-
trum C . Agatur
 TX quæ curvam
illam in corporis
loco quovis T
contingat, inq;
hac Tangente T -
 X capiatur TT
æqualis arcui T -
 R . Nam longitu-
do arcus illius ex
figurarum Qua-
draturis per Methodos vulgares innotescit. De puncto T educa-
tur recta TZ Tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendi-
culari illi occurrens in Z , & erit vis centripeta proportionalis rec-
tæ TZ . Q.E.I.



Nam si vis, qua corpus trahitur de T versus C , exponatur per
rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires
 TT ,

TY , TZ ; quarum TZ trahendo corpus secundum longitudinem sibi PT , motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda TR , accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus T filo rectilineo AT a centro A pendens, describat arcum circulare $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN : aequalia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ , AR , similia erunt triangula ANT , TYZ ; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN ; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT , vis TZ , qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim gravitatis AT , ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN .

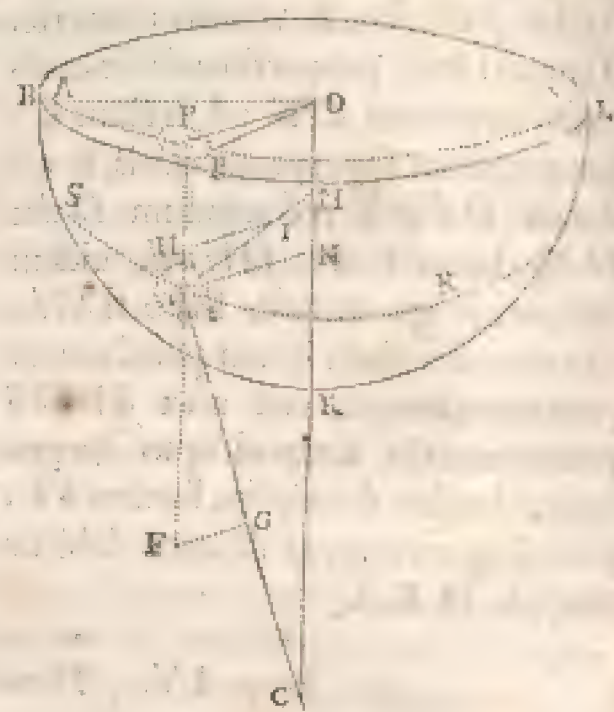
Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR , ad sinum TN , Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscumq; curvis in plano per centrum virium transiente descriptis, descendant & ascendant.

Descendat enim corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam STR in plano per vicium centrum C transiente datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sit-

in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi pressionis qua corpus urget superficiem, vicissimq; urgetur versus M a superficie, proportionalis; $PHTF$ recta axi parallela per corpus transiens, & GF , IH rectæ a punctis G & I in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area AOP , radio OP ab initio motus descripta, sit temporis proportionalis. Nam vis TG (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires TF , FG ; & vis TI in vires TH , HI . Vires autem TF , TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est motus puncti P , quo Trajectoriæ vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF , TH tollerentur, & corpus solis viribus FG , HI ageretur, hoc est idem ac si corpus in plano AOP vi centripeta ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP . Sed vi tali describeretur area AOP (per Prop. I.) temporis proportionalis. Q. E. D.



Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra
duo

duo vel plura in eadem quavis recta CO data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunq; curvam ST , foret area AOP tempori semper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, datisq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cuius axis per centrum illud transit; inveniendæ est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam $STtR$, & ex data ejus velocitate in altitudine SC dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC . Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam Tt , sitq; Pp vestigium ejus plano AOP descriptum. Jungatur Op , & circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti sit PpQ vestigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datam magnitudinem & positionem circelli, dabitur Ellipsis illa PpQ . Cumq; area POp sit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore derur, dabitur Op positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio p , una cum angulo OPp , in quo Trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP . Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud APp , eadem methodo qua curva linea $VIKk$ in Propositione XLI. ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigiî punctis P erigendo ad planum AOP perpendiculara PT superfici curvæ occurrentia in T , dabuntur singula Trajectoriæ puncta T . Q. E. I.

S E C T. XI.

De Motu Corporum Sphaericorum viribus centripetis se mutuo petentium.

Haëtenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuae sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq; attrahens possit quiescere neq; attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possumus a Leëtoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.

Sunt enim distantiae a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atq; adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæc distantiae circum terminos suos communi mo-

tu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ quæ his distantiiis circumactis describuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

Si corpora duo viribus quibuscvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

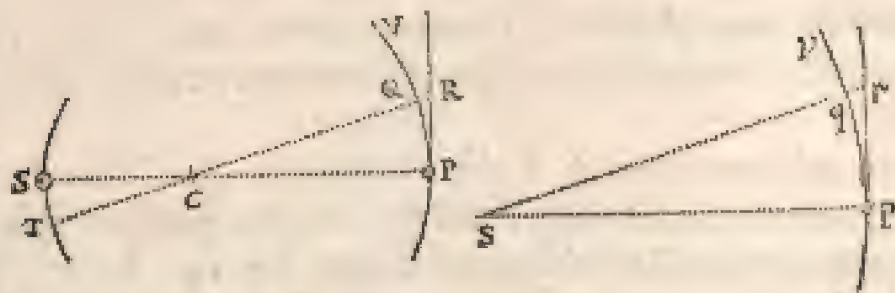
Revolvantur corpora S , P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T deq; P ad Q . A dato puncto s ipsis SP , TQ æquales & parallelæ ducantur semper sp , sq ; & curva pqv quam punctum p , revolvendo circum punctum immotum s , descri-



bit, erit similis & æqualis curvis quas corpora S , P describunt circum se mutuo: proindeq; (per Theor. XX.) similis curvis ST & PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : id adeo quia proportionēs linearum SC , CP & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C , per Legum Corol-

rollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inq; s & p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr curvas PQ & pq in P & p , & producantur CQ & sq ad R & r . Et ob similitudinem figurarum $CPRQ$, $spqr$, erit RQ ad rq ut CP ad sp , adeoq; in data ratione. Proinde si vis qua Corpus P versus Corpus S , atq; adeo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim qua corpus p versus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR , pr ad arcus PQ , pq , per intervalla ipsis pro-



portionalia RQ , rq ; adeoq; vis posterior efficeret ut corpus p gyraretur in curva pqr , quæ similis esset curvæ PQV , in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s , P & p , & æqualitatem distantiarum SP , sp) sibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in dimidiata ratione distantie sp ad distantiam CP , eo ut temporibus quæ sunt in eadem dimidiata ratione descri-

scribantur arcus PQ , pq , qui sunt in ratione integra: Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes PQV , pqv , quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantie suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantie proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum & circum se mutuo sectiones conicas umbilicos habentes in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantie reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolvendum tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrinus P, circa alterum immotum S gyrantis & figuris quæ corpora circum se mutuo describunt figuram similem & æqualem describentis, in dimidiata ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.

Namq;

Namq; ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in dimidiata ratione distantiarum CP & SP vel sp , hoc est, in dimidiata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est tempora tota quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P , viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, Axis transversus erit ad axem transversum Ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S .

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema superius, forent in dimidiata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipseos autem axis transversus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; adeoque ad axem transversum Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverse, axis transversus Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem transversum descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S . Q. E. D.

Prop.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuscvis se mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiae corporum a centro illo communi atq; respectu distantiae totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eadem sunt ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitibus datis utcumq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitibus totidem datis datamq; illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel deniq; ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. Hoc est Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiae utriusq;. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema novissimum, perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet (per Hypothesin) & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deq; locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema novissimum) perinde sunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyantium motus

motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus
corporum in spatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centrīs: requiruntur motus plurimum Corporum inter se.

Ponantur imprimis corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D . Describent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. Ellipses centra habentes in D , quarum magnitudo ex Problemate V. innotescit.

[illegible]

faciendo ut Systema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . Tali motu corpus S (eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiae CS proportionalium, trahitur versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C ; & punctum D ob proportionales CS , CD describet Ellipsin consimilem, e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) aequaliter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D Ellipses suas describendo, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V , & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T , L & S circa centra D & C , sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.



Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sinto mutuae omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiae ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia aequalibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B , in plano immobili describunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum

rum ab eorundem centrīs, moveri posse inter se in Ellipsis, & radiis ad umbilicos ductis Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsis accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsis accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsis errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantq; ad singula vires absolute proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro; & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absq; errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsis, atq; radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximū a comuni illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usq; donec error iste & actiones mutue sint datis quibuscumque minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipsis quadrent, & areae respondeant temporibus, absq; errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximī & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Sys-

tema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus oriatur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones sunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum, & augendo corporis maximi distantiam, donec rectorum ab hoc ad reliqua ductarum minores sint differentiae & inclinationes ad invicem quam datae quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absq; erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporibus proportionales, absq; ullis erroribus, nisi quas partium distantiae (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas pa-

parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutant situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsis vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur, manifestum est, quod eadem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter & secundum lineas parallelas quamproxime.

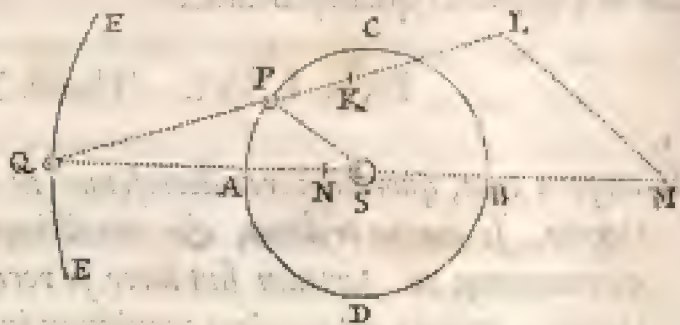
Prop. LXVI. Theor. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis precedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & Q in eodem plano circa maximum S , quorum P describat orbem interiorem PAB , & Q exteriorem QE . Sit QK mediocris distantia corporum P & Q ; & corporis P versus Q attractio acceleratrix in mediocri illa distantia exponatur per eandem. In duplicata ratione QK
ad

ad QP capiatur OL ad QK , & erit QL attractio acceleratrix corporis P versus Q in distantia quavis QP . Junge PS , eiq; parallelam age LM occurrentem QS in M , & attractio QL resolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones QM , LM . Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una tendente ad S & oriunda a mutua attractione corporum S & P . Hac vi sola corpus P , circum corpus S sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PS temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis S . Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. XXI. Vis altera est attractionis LM , quæ quoniam tendit a P ad S , superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut area etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor.



XXI. At quoniam non est quadrato distantia PS reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportionem aberrantem, idq; eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor. XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum S describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantia PS reciproce proportionalis; vis illa composita aberrando ab hac proportionem, faciet ut Orbis PAB aberraret a forma Ellipseos umbilicum habentis in S ; idq; eo magis quo major est aberratio ab hac proportionem; atq; adeo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia QM , trahendo corpus P secundum lineam ipsi QS parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in S , quæq; ab hac determinatione tanto ma-

magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus P , radio SP , areas non amplius temporibus proportionales describet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a P ad S , tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantie PS . Quibus intellectis, manifestum est quod area temporibus tum maxime sunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, sit minima; & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad præfata formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, sit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis S attractio acceleratrix versus Q per lineam QN ; & si attractiones acceleratrices QM , QN æquales essent, hæc trahendo corpora S & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Idem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæc attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio QN minor esset attractione QM , tolleret ipsa attractionis QM partem QN , & maneret pars sola MN , qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio QN major esset attractione QM , oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem QN reducitur semper attractio tertia superior QM ad attractionem MN , attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea area ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfata Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est ubi corporum P & S attractiones acceleratrices, factæ versus corpus Q , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est ubi attractio QN non est nulla, neq; minor minima attractionum omnium QM , sed inter attractionum omni-

nium QM maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neq; multo minor attractione QK . Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, Q circa maximum S in planis diversis, & vis LM , agendo secundum lineam PS in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi QS parallela est, (atq; adeo, quando corpus Q versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB ;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum P & S ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN , adeoq; minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio QN non est multo major neq; multo minor attractione QK . Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod si corpora plura minora P, Q, R &c. revolvantur circa maximum S : motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum S pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur atq; cæteri a se mutuo.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum S, P, Q ; si attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum, corpus P radio PS aream circa corpus S velocius describet prope conjunctionem A & oppositionem B , quam prope quadraturas C, D . Namq; vis omnis qua corpus P urgetur & corpus S non urgetur, quæq; non agit secundum lineam PS , accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigatur. Talis est vis NM . Hæc in transitu corporis P a C ad A tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein usq; ad D in consequentia, & motum retardat; tum in antecedentia usq; ad B , & ultimo in consequentia transeundo a B ad C .

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P , cæteris par-

paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus *Corol. 9.* ostendetur) evadet maxima ubi Aplides sunt in Syzygiis; indeq; fieri potest ut corpus *P*, ad Apfidem summam appellans, absit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per abla-



tionem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur; est autem vis illa centripeta (per *Corol. 2*, *Prop. IV.*) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctioq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel di-

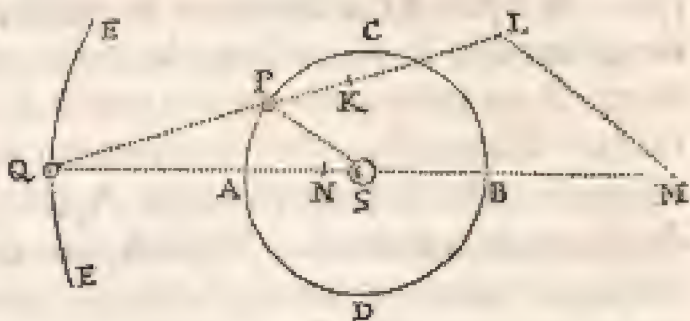
minui minus quam in Radii huius ratione sesquuplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueretur, corpus P minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro S ; & contra, si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui Q , qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuat per vices, augebitur simul ac diminuetur Radius SP per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquuplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis S per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui Q diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore P descriptæ axis seu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus S in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus S trahit corpus P . Vis prior LM , si augeatur distantia PS , augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantie PS , & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem seu Apſidem summam regredi. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus P urgetur in corpus S differentia est inter vim qua corpus S trahit corpus P & vim KL ; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantie PS , decrescit in maiore quam duplicata ratione distantie PS , adeoque per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex causa utraq; conjunctim, adeo ut pro huius vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis sit quasi dupla vis LM in quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim KL , transferetq; Augem singulis re-

revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum S, P corporibus pluribus Q, Q, Q &c. in Orbe QE consistentibus, undeq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipsius S minuetur undiq; , decresetq; in ratione plusquam duplicata distantiae.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ factio in majori vel minori quam duplicata ratione distantiae SP , in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atq; adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in

Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progre-



dientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM . Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augetur in ratione plusquam duplicata distantiae diminutæ: Manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsu semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiae diminutæ, adeoq; Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu

hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apfide ima ad Apfidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum S, P, Q , ubi Apfides orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi Apfides sunt in Syzygiis. Si Apfides constituentur in quadraturis ratio prope Apfides minor est, & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in minore quam duplicata ratione distantie Apfidis summae ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apfidis imae ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apfides constituuntur in Syzygiis, vis in Apfide ima est ad vim in Apfide summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis S componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis subductæ viribus corporis S relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter Apfides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apfidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipseos; inq; transitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis QES immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus NM, ML , quæ sunt cau-

causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum Orbis PAB , nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis NM ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusq; P de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post quadraturas, id est inter C & A , D & B , intelligitur ex modo expositis quod, in transitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usq; ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in precedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi sunt in Octantibus alteris inter A & D , B & C . Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisq; ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus P ubi nodi sunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idq; in partem versus Q , in transitu suo a nodo C per Conjunctionem A ad nodum D ; & in contrariam partem in transitu a nodo D per Oppositionem B ad nodum C ; manifestum est quod in motu suo a nodo C , corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo CD , usq; dum perventum est ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo longissime distans a plano illo primo CD , transit per planum Orbis QES ,
non

non in plani illius Nodo altero D , sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis Q , quodq; proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et similiargumento pergent Nodi recedere in transitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis conditionis utriusq; participes recedunt tardius, adeoq; semper vel retrogradi vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione Corporum P , Q quam in eorum Oppositione, idq; ob majores vires generantes NM & ML .

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendent a magnitudine corporis Q , obtinent præcedentia omnia, ubi corporis Q tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur eorum duorum S & P Systema. Et ex aucto corpore Q , auctaq; adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus Q circum Systema corporum P & S revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires NM , ML , ubi corpus Q longinquum est, sint quamproxime ut vis QK & ratio PS ad QS conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PS , tum corporis Q vis absoluta, ut QS cub. reciproce; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante eorum S & P Systemate, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directæ vis absolutæ corporis Q & ratione triplicata inversa distantie QS . Unde si Systema corporum S & P revolvatur circa corpus longinquum Q , vires illæ NM , ML & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde si magnitudo corporis Q proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ

NM

NM , ML & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis Q e corpore S spectati, & vice versa. Namq; hæ rationes eadem sunt atq; ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium QE & PAB forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum Q & S vel maneant vel mutantur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est vis corporis S , qua corpus P de recto tramite in Orbitam PAB deflectere, & vis corporis Q , qua corpus idem P de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportionione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utcumq; corporum magnitudines, vires & distantie; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires NM , ML cæteris stantibus sunt ut Radius SP , & harum effectus periodici (per *Corol. 2*, *Lem. X*) ut vires & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P ; & hinc errores angulares e centro S spectati (id est tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt in qualibet revolutione corporis P , ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Coniungantur hæ rationes cum rationibus *Corollarii 14.* & in quolibet corporum S , P , Q Systemate, ubi P circum S sibi propinquum, & S circum Q longinquum revolvitur, errores angulares corporis P , de centro S apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P , ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis S inverse. Et inde motus medius

Au-

Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis S inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis PAB non mutantur motus Augis & Nodorum sensibilitur, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major sit nunc minor quam radius PS , Exponatur vis mediocris LM per radium illum PS , & erit hæc ad vim mediocrem QK vel QN (quam exponere licet per QS) ut longitudo PS ad longitudinem QS . Est autem vis mediocris QN vel QS , qua corpus retinetur in orbe suo circum Q , ad vim qua corpus P retinetur in Orbe suo circum S , in ratione composita ex ratione radii QS ad radium PS , & ratione duplicata temporis periodici corporis P circum S ad tempus periodicum corporis S circum Q . Et ex æquo, vis mediocris LM , ad vim qua corpus P retinetur in Orbe suo circum S (quæve corpus idem P eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile S ad distantiam PS revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia PS , datur vis mediocris LM ; & ea data datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PS , MN .

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus P circum corpus S revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem S ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori S concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus S , & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis Q , quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis Q vel S , quæ scent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio com-

variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaq; revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis S ex materia non fluida constantem ampliari & extendi usq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio Q , nullum acquireret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus Q , & ab ipsius inaequabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietq; ipsam descendere usq; ad Syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetq; descensum ejus & faciet ipsam ascendere usq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & resfluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyroq; compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusq; Oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbiati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usq; dum annulus conatu contrario

motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decrefcentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Oñtantibus post Quadraturas; dein maximus reclamationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Oñtantibus proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo denfiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phenomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eisdem constanter servat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circumscriptum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunq; oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neq; propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiem parte qua prius, impulsu quocunq; novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus

sus successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est eundem ac si Globus vi simplici ex utroque; (per Legum Corol. 2.) composita impulsus fuisset, atque adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atque adeo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: Generabunt hi eundem motum circula rem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque; per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hemisphæria, urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quatione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum liberetur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæc nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q , circa interiorum P, S commune Gravitatis centrum C , radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum S , radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis Q attractiones versus S & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum S & P commune gravitatis centrum C , quam in corpus maximum S , quæq; quadrato distantiae QC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiae QS : ut rem perpendenti facile constabit.

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q circa interiorum P & S commune gravitatis centrum C , radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus Q conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus Q ex una

na parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium Q attrahitur. Detur praterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum S lege cæterorum attrahitur: sitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis S , moveri incipit & magis deinceps magisq; agitur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolute directæ & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahent agitentq;, & Orbitæ cujusq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.



Prop:

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Systemate corporum plurimum A, B, C, D &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B , quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A , paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothesi, & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B , paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B , ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B , paribus distantis; & ita est attractio acceleratrix corporis B versus A , ad attractionem acceleratricem corporis A versus B . Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B , ut massa corporis A ad massam corporis B ; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam vim attractivam corporis B , ut massa corporis A ad massam corporis B . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora A, B, C, D , &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A, B, C, D* &c. seorsim spectata trahant cetera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunq; distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunq; communem ex distantis ab unoquoq; trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsis umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per *Corol. Prop. LXVIII.* collatum cum hujus *Corol. 1.*

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut sit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem, sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris aut Aeris mediæ cujuscunq; seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunq; impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportionem Mathematicas in hoc Tractatu expendens: ut in Defi-

ni-

nititionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunq; positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phanomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

S E C T. XII.

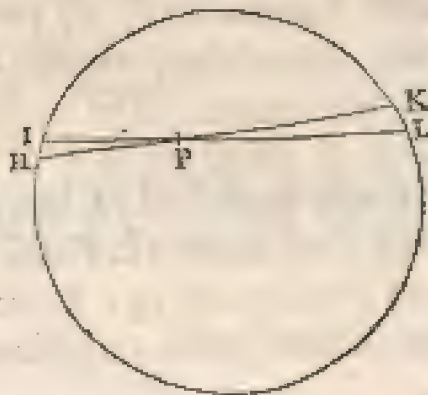
De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa Sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK , IL , arcus quam minimos HI , KL intercipientes; & ob triangula HPI , LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiiis HP , LP proportionales, & superficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad HI & KL rectis per punctum P transeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum

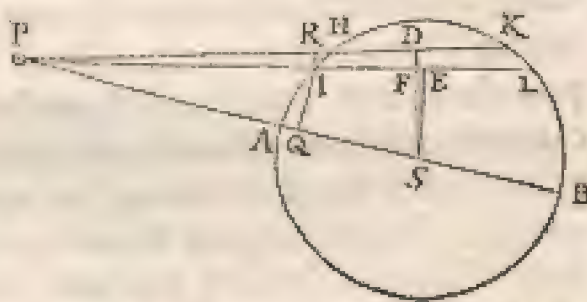
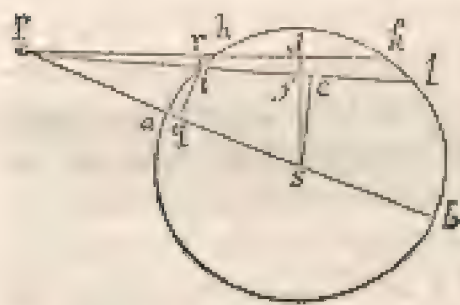
harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directæ & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ se mutuo destruunt. Et simili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.



Prop. LXXI. Theor. XXXI.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphære, vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab eodem centro.

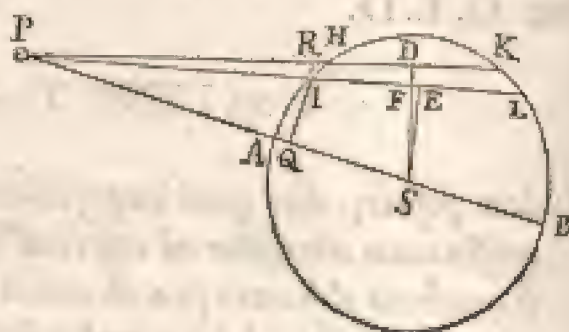
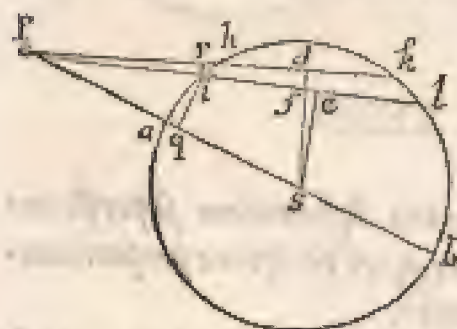
Sint $AHK B$, $abkb$ æquales duæ superficies Sphæricæ, centris S, s , diametris AB, ab descriptæ, & P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK, PIL, pbk, pil , auferentes a circulis maximis AHB, abb , æquales arcus quam minimos HK, bk & HL, bl : Et ad eas demittantur perpendiculara $SD, sd; SE, se; IR, ir$, quorum

Bb $SD,$

SD , & d secant PL , pl in F & f . Demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ , iq ; & ob æquales DS & ds , ES & es , & angulos evanescentes DPE & dpe , lineæ PE , PF & pe , pf & lineolæ DF , df pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE , dpe simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaq; constitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF , & pf ad pi ut DF vel df ad ri ; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri , hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum ib . Rursus PI ad PS ut IQ ad SE , & ps ad pi ut SE vel se ad iq ; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq . Et conjunctis rationibus PI quad. $\times pf \times ps$ ad pi quad. $\times PF$



$\times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ib \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circulaarem, quam arcus ib convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p , sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntq; hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 resolutione virium) secundum lineas PS , ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ , & pi ad pq ; id est (ob similia triangula PIQ & PSF , piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf . Unde ex æquo fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad

pf

$\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est ut ps quad. ad PS quad. Et simili argu-

mento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL , kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps quad. ad PS quad.; inq; eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraq; superficies Sphærica, capiendo semper $sd = SD$ & $se = SE$, distingui potest. Et per Compositionem, vires rotarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Sphæræ cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decreşcentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur ratio diametri Sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, & distantias a centrīs proportionales esse diametris, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Hinc attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directæ & ratione duplicata distantiarum inverse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est in ratione triplicata diametrorum, & distantia sunt ut diametri, & ratio prior directæ una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur, sintq; distantia a centrīs Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantia erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per *Corol. 3. Theor. IV.*

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantia suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per *Theor. XXX.* quod Sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphære interioris *PEQF*. Et per *Theor. XXXII.* hæc est ut distantia *PS. Q. E. D.*



Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum sub initio in Lemmatis generalibus expositam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulae æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Isdem positus, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantie corpusculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio Sphære totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphære. Nam per Theor. XXXII. si distantie sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione, & distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantis quibulvis attractiones sunt ut Sphære applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum extra Sphæram homogeneam positum trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantie a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphære datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia similis attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantie ejus a centro Sphære trahentis, (per Theor. XXXI.) & prop.

propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Theor XXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiae ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centrīs earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuae, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

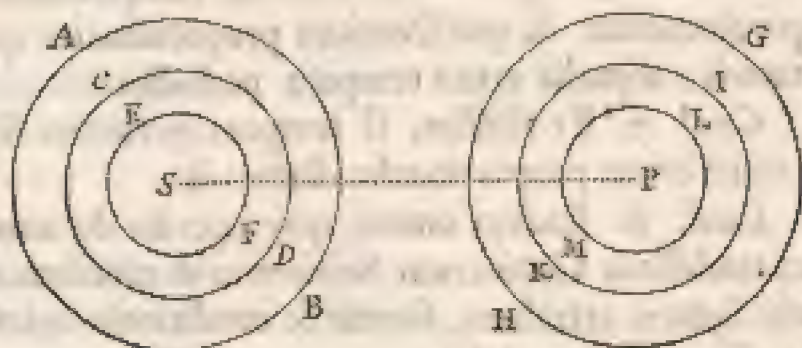
Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæra in progressu a centro ad circumferentiam (quod materie densitatem & vim attractivam) utrunq; dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undiq; similes, & vis attractiva puncti cujusq; decrescit in duplicata ratione distantie corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantie centrorum.

Sunto

Sunto Sphæræ quocunq; concentricæ similes AB , CD , EF &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quocunq; concentricas similes GH , IK , LM , &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantie SP . Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentiis composita AB , trahit totam ex concentricis quibuscunq; vel concentrica-

rum differen-
tiis compo-
sitam GH , erit
in eadem ra-
tione. Auge-
atur numerus
Sphærarum
concentrica-
rum in infini-



tum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunq; crescat vel decreseat: & addita materia non attractiva compleatur ubi vis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantie quadratæ ratione inversa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus quibuscunq; centrorum distantis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; distantis quibuscunq; inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantis, ut Sphærae attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; distantis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphærae utriusq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphærae aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulae circa singulas, sintq; distantiae inter centra revolvantium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia, distantiae erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

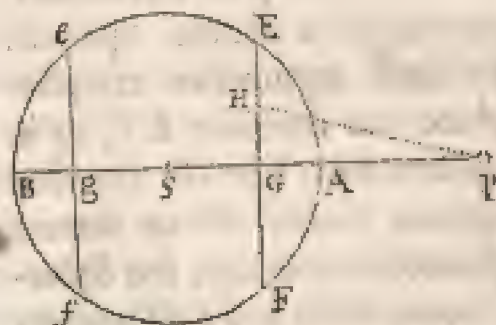
Corol. 9. Ut & ubi gyrationia sunt etiam Sphærae attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphærae duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas 1. Sit $ACBD$ Sphæra, S centrum ejus, P corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphærae per centrum corpusculi transiens, EF , ef plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphærae; Gg intersectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF .
Puncti

Puncti H vis centripeta in corpusculum P secundum lineam PH exercita est ut distantia PH , & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut numerus punctorum ductus in distantiam PG : id est ut contentum sub plano ipso EF & distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg ; sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg ; & summa virium plani utriusque; ut planum EF ductum in



summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS , vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphære distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui S a corpusculo P . Q. E. D.

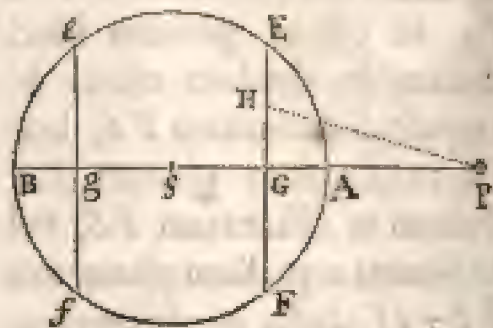
Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphæram $ACBD$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS . Q. E. D.

Cas 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris P ; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphære primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphære; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo

culo unico in centro Sphære primæ, & propterea proportionalis est distantie inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphære se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $ACBD$, & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg ; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG ; erit vis ex utraq; composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentie distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS , distantiam corpusculi a centro Sphære. Et simili argumento attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est attractio Sphære totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphære. Q. E. D.



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem $ACBD$ sita, probabitur ut prius, quod attractio, siue simplex Sphære unius in alteram, siue mutua utriusq; in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphære in progressu a centro ad circumferentiam sint utcumq; dissimilares & inequabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undiq; similes; & vis attractiva puncti cuiusq; sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua huiusmodi Sphære duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantie inter centra Sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo
Propositio LXXVII. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. & LXIV. de motu
corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt,
valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum,
conditionis jam descriptæ, suntq; corpora attracta Sphære con-
ditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; ni-
mirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum
ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes
in utroq; Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, &
componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem le-
ge in recessu a centro decrescentes vel crescentes cum seipsis.
Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones mi-
nus elegantes exhibent, figillatim percurrere longum esset: Ma-
lim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determi-
nare, ut sequitur.

Lemma XXIX.

*Si describantur centro S circulus quilibet AEB, (Vide Fig. Prop.
sequentis) & centro P circuli duo EF, ef, secantes priorem in
E, e, lineamq; PS in F, f; & ad PS demittantur perpendiculara
ED, ed: dico quod si distantia arcuum EF, ef in infinitum mi-
nui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis Dd ad lineam
evanescentem Ff ea sit, quæ lineæ PE ad lineam PS.*

Nam si linea Pe secet arcum EF in q; & recta Ee, quæ cum
arcu evanescente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T;
& ab S demittatur in PE normalis SG: ob similia triangula
EDT, edt, EDS; erit Dd ad Ee ut DT ad ET seu DE ad

tem minor, in ratione PD ad PE , adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd ; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, cum lineolæ omnes Dd sibi invicem æquentur, adeoque pro datis haberi possint, ut summa omnium PD ducta in Dd , id est, ut $\frac{1}{2} PFq. - \frac{1}{2} PDq.$ sive $\frac{1}{2} PEq. - \frac{1}{2} PDq.$ vel $\frac{1}{2} DEq.$ ductum in Dd ; hoc est, si negligatur data $\frac{1}{2} Dd$, ut DE quad. Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff ; & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq. \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P . At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq. \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB , centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB , in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendiculara DE , Sphæræ occurrentia in E , & in ipsis capiantur longitudines DN , quæ sint ut quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis quam

Sphæræ particula sita in axe ad distantiam PE exercet in corpusculum P conjunctim: dico quod vis tota, qua corpusculum P trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ AB & linea curva ANB , quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd , & Sphæram totam dividi in totidem lamina Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendicularum dn . Per Theorema superius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpusculum P est ut $DEq. \times Ff$ & vis particulae unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem per Lemma

ma

ma novissimum, Dd ad Ff ut PE ad PS , & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq. \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, & propte-

rea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad

distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut areae omnes $DNnd$, hoc est Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiiis, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEq.}$: erit vis qua corpusculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiae corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEqq.}$: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V , fiat autem DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$: erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H , & ad axem PAB demissa Normali HI , bisecetur PI in L ; & erit
(per

(per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) $PEq.$ æquale $PSq. + SEq. + 2PSD.$ Est autem $SEq.$ seu $SHq.$ (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo $PSI.$ Ergo $PEq.$ æquale est contento

sub PS &

$PS + SI +$

$2SD,$ hoc

est, sub PS

& $2LS +$

$2SD,$ id est,

sub PS &

$2LD.$ Por-

ro DE quad

æquale est

$SEq. - SDq.$

seu $SEq. - LSq. + 2SLD - LDq.$ id est, $SLD - LDq. -$

$ALB.$ Nam $LSq. - SEq.$ seu $LSq. - SAq.$ (per Prop. 6 Lib. 2.

Elem) æquatur rectangulo $ALB.$ Scribatur itaq; $2SLD - LDq.$

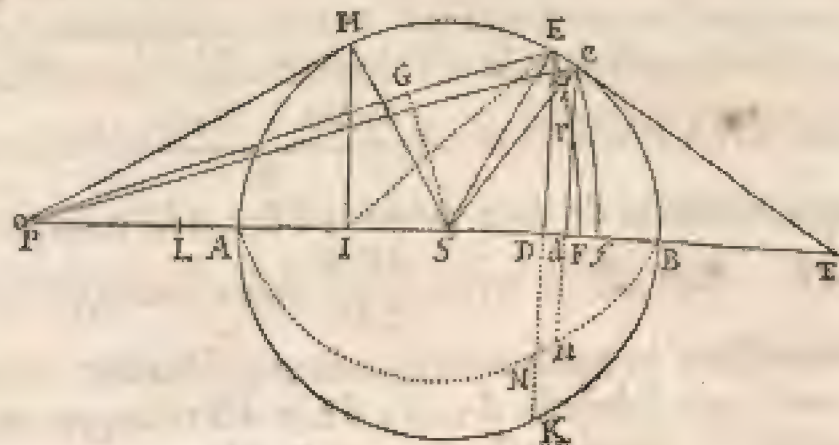
$- ALB$ pro $DEq.$ & quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V},$ quæ secundum

Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ $DN,$ resolvat sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V}$

$-\frac{LDq. \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}:$ ubi si pro V scribatur ratio in-

versa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD;$ tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum arcæ per Methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam $PE,$ dein $2PS \times LD$ pro $PEq.,$ & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$
Pone

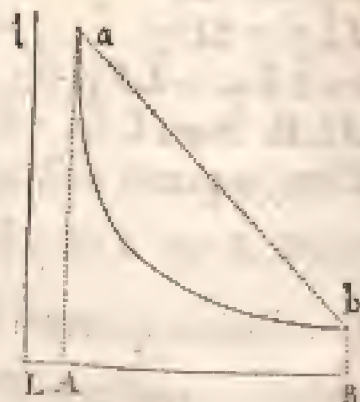


Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ

pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrecendo æquetur semper longitudini LD , describet aream $\frac{LBq. - LAq.}{2}$, id est, aream $SL \times AB$;

quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem

normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB , per puncta a, b describatur Hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



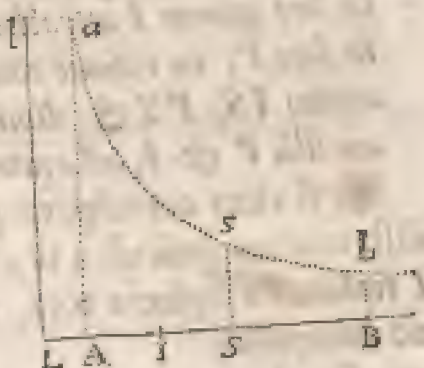
Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PEcnb.}{2ASq.}$ pro V , dein $2PS \times LD$ pro $Pq.$; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq. - ASq.}{PS \times LD - 2PS} = \frac{ALB \times ASq.}{2PS \times LDq.}$ id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq.}$. Si ducantur hujus partes

tres

tres in longitudinem AB , prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2 LD}$ aream

$\frac{ALB \times SI}{2 LA} - \frac{ALB \times SI}{2 LB}$, id est $\frac{1}{2} AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ ac tertiæ; &

manebit area quæsitæ $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendiculara LI, Aa, Ss, Bb , quorum Ss ipsi SI æquetur, perq; punctum s Asymptotis LI, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendicularis Aa, Bb in a & b ; & rectangulum $2 ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione distantie a particulis, ſcribe $\frac{PE^3}{2 AS^2}$ pro V , dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE , & fiet DN ut

$\frac{SL \times SI^3}{\sqrt{2 \times LD^3}} - \frac{SI^3}{2 \sqrt{2 \times LD^3}} - \frac{ALB \times SI^3}{2 \sqrt{2 \times LD^3}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB , producant Areas totidem, viz.

$\frac{\sqrt{2 \times SL \times SI^3}}{LA^2} - \frac{\sqrt{2 \times SL \times SI^3}}{LB^2} - \frac{LB^3 \times SI^3 - LA^3 \times SI^3}{3 \sqrt{2 \times LA^3}}$

& $\frac{ALB \times SI^3}{3 \sqrt{2 \times LA^3}} - \frac{ALB \times SI^3}{3 \sqrt{2 \times LB^3}}$. Et hæ post debitam reductionem, subductis posterioribus de priori, evadunt $\frac{8 SI cub.}{3 LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum P in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI cub.}{PI}$, id est reciproce ut $PS cub. \times PI$. Q. E. I.

semidiametrum SA : Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP quad. ad SA quad.; si in quadruplicata, ut SP cub. ad SA cub. Unde cum attractio in P , in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS cub. $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA cub. $\times PI$, id est (ob datum SA cub.) reciproce ut PI . Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis P , ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DE q. \times PS}{PE \times V}$.

Ergo si agatur IE , ordinata illa ad alium quemvis locum I , mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DE q. \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e

Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantis IE , PE , ut PE^n ad IE^n , (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DE q. \times PS}{PE \times PE^n}$ &

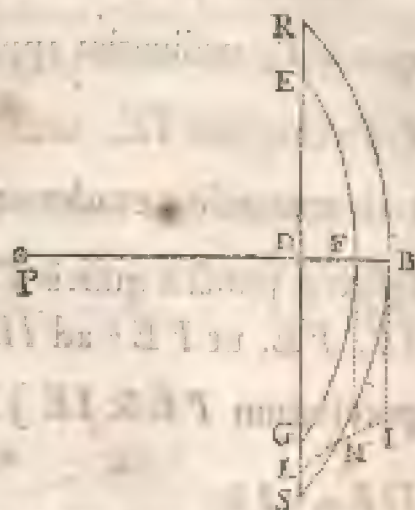
$\frac{DE q. \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad IS

$\times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE , SEI , fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA ; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA ; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA dimidiata est ratio distantiarum PS , SI ; & IE^n ad PE^n dimidiata est ratio virium in distantis PS , IS . Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisq; proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphaerae locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphaerae, & $RBSD$ segmentum ejus plano RDS & superficie Sphaerica RBS contentum. Superficie Sphaerica EFG centro P descripta secetur DB in E , ac distinguatur segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O , & erit haec superficies (per demonstrata Archimedis) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus praeterea vires attractivas particularum Sphaerae esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est n ; & vis



qua superficies FE trahit corpus P erit ut $\frac{DF \times O}{PE^n - 1}$. Huic proportionale sit perpendicularum FN ductum in O ; & area curvilinea $BDDL$, quam ordinatum applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P . Q. E. I.

Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphaerae in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento EBK trahatur corpus P (Vide Fig. Prop. 79. 80. 81.) in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE def-

describatur superficies Sphærica EFK , qua distinguatur segmentum in partes duas $E B K F$ & $E F K D$. Quærat^r vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius $E B K D$.
Q. E. I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulam tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subungere.

S E C T. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio verius corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantie at-

tracti

tracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibilibiter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decreascit in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interiora constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusq; Sphæricis partes qualibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortius erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad huiusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, siue corpora attracta collocentur extra Orbes, siue intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis asfigeatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia & ex materia equaliter attractiva constantia seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut $A \text{ cub.}$ & $B \text{ cub.}$ adeoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantia a corporibus, ut A & B : attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ id est, ut corporum latera illa cubica A & B . Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ id est æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ qq.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ qq.}}$ id est reciproce ut latera cubica A & B . Et sic in cæteris.

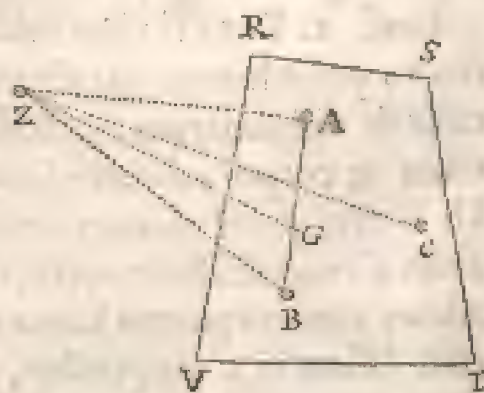
Corol.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum aequalium corporis cujuscunq; vires attractivæ sint ut distantie locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & aequali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particulae A, B trahant corpusculum aliquod Z viribus quæ, si particulae æquantur inter se, sint ut distantie AZ, BZ ; sin particulae statu-
antur inæquales, sint ut hæ particulae in distantias suas AZ, BZ respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB , & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A ; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B . Vis $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG , æquantur, adeoq; cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G , & vim $A + B \times GZ$ component; hoc est, vim eandem ac si particulae attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G , globum ibi componentes.



Eo-

Eodem argumento si adjungatur particula tertia C ; & componatur hujus vis cum vi $A+B \times GZ$ tendente ad centrum G , vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius G & particulae C ; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C ; & eadem erit ac si globus & particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscumq; $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Spharicum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis equalibus constantia, quarum vires sunt ut distantiae locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcumq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atq; Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

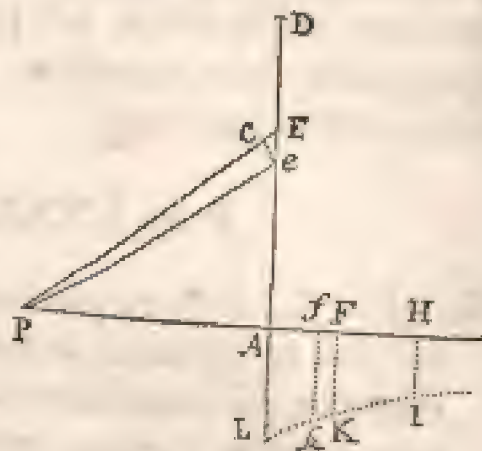
E e

Prop.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunq; puncta tendant vires centripetæ decreſcentes in quacunq; diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubi vis in recta qua ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis conſiſtit.

Centro A intervallo quovis AD , in plano cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis qua corpus quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpus attractum P agatur recta PE : In recta PA capiatur PF ipsi PE æqualis, & erigatur Normalis FK , quæ sit ut vis qua punctum E trahit corpusculum P . Sitq; IKL curva lineæ quam punctum K perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in L . In PA capiatur PH æqualis PD , & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I ; & erit corpusculi P attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP . Q. E. I.



Etenim in AE capiatur lineæ quam minima Ee . Jungatur Pe , & in PA capiatur Pf ipsi Pe æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis E trahit ad se corpus P , ponitur esse ut FK , & inde vis qua punctum illud trahit corpus P versus A est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus P versus A , ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee , & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE , Ee & ce) æquatur rectangulo $PE \times ce$

$\times cE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A ut $PE \times Ff \& \frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, siue ut area $FKkf$ ducta in AP . Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A , est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP . Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF \text{ quad.}}$, atq; adeo area

area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circum-

lum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quaelibet D^n , hoc est, si sit

FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; e-

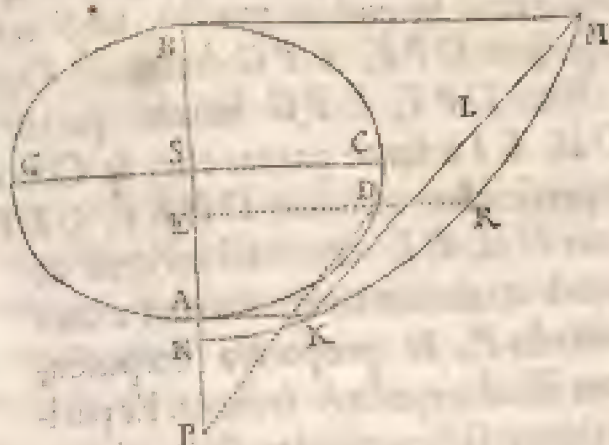
rit attractio corpusculi P in circumulum ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2} , propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi, ad cujus puncta singula tendunt vires centripetæ in quacumq; distantiarum ratione decrescentes.

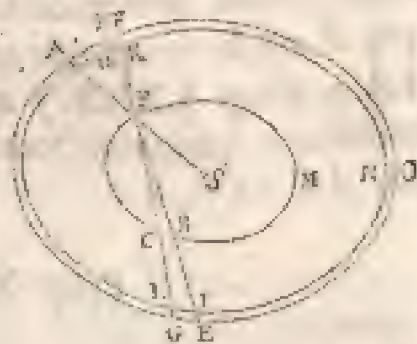
trahit corpus quodvis P , exterius in axe suo AB situm. Sit NK - RM Sectio Conica cuius ordinatim applicata ER , ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD , quæ ducitur ad punctum illud D , in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendiculara AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M ; & jungantur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC : & vis qua Sphærois tra-



hit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq. - PS \times KMRK}{PSq. + CSq. - ASq.}$ ad $\frac{AS cub.}{3 PSquad.}$

Et eodem computando fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem in data quavis ejusdem diametro collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA , tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G : Sintq; PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior tran-



transcat per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C , posterior secet easdem rectas in H , I & K , L . Habeant autem Sphaeroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptae DP & BE , FP & CG , DH & IE , FK & LG sibi mutuo aequales; propterea quod rectae DE , PB & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectae FG , PC & KL . Concipe jam DPF , EPG designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF , EPG infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH , EI infinite parvas esse; & Conorum particulae Sphaeroidum superficiebus abscissae $DHKE$, $GLIE$, ob aequalitatem linearum DH , EI , erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P , & propterea corpusculum illud aequaliter trahent. Et pariratione, si superficiebus Sphaeroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF , $EGCB$ in particulas, haec omnes utrinque aequaliter trahent corpus P in partes contrarias. Aequales igitur sunt vires conici DPF & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiae omnis extra Sphaeroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a sola Sphaeroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphaeroide tota $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS . Q. E. I.



Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est Sphaera vel Cylindrus aliave figura

ra regularis, cujus lex attractionis, cujus decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis equalibus equaliter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadratica, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGL planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus I , inq; plana innumera mHM , nIN &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C est reciproce ut $CH^n - 2$. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi $CH^n - 2$ reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM . Similiter in planis singulis IGL , nIN , oKO &c, capi-

antur



antur longitudines GL , IN , KO &c. ipsi CG^{n-2} , CI^{n-2} , CK^{n-2} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captae, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos est reciproce ut CG^{n-3} , & propterea vis solidi totius est reciproce ut CG^{n-3} Q. E. D.

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani GL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiae CG . Et solidi pars $LGLOKO$, planis parallelis GL , OKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi solidi ultra planum OK situm trahitur. Hac autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3} , hoc est (ob æquales CG , CK) reciproce ut CG^{n-3} . Q. E. D.



Corol. 1. Hinc si solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG , IN utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIAO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3} .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus

cor-

corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cuiusvis plusquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cuius latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet, propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioriſ corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite maior quam attractio partis citerioriſ.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quaeratur motus corporis: Solvetur Problema quaerendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas factio. Et contra, ſi quaeratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B , quæ ſit ut baſis dignitas qualibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quaeratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit; Suppono baſem augeri par-

te quam minima O , & ordinatim applicatam $A + O^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mm}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atq; huius termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\frac{mm-mm}{2nn} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quaesita ut $\frac{mm-mm}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mm}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^2$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galileus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2B^{-3}$ seu $\frac{2}{B^{\text{cub.}}}$: adeoque vi, quae sit reciproce ut cubus ordinatim applicatae, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis huiusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

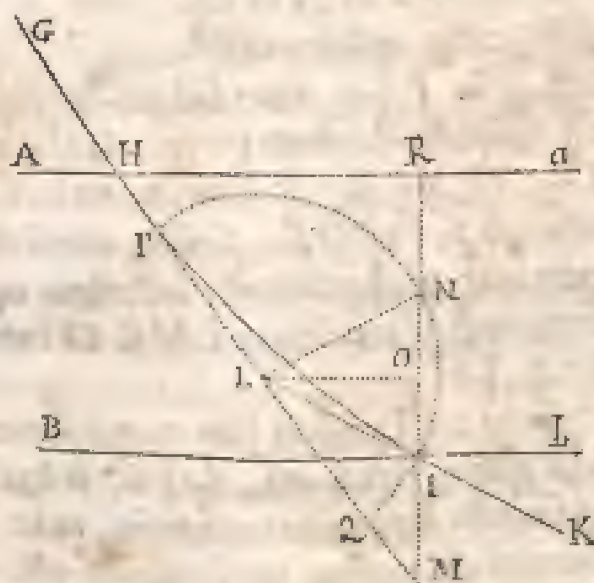
S E C T. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

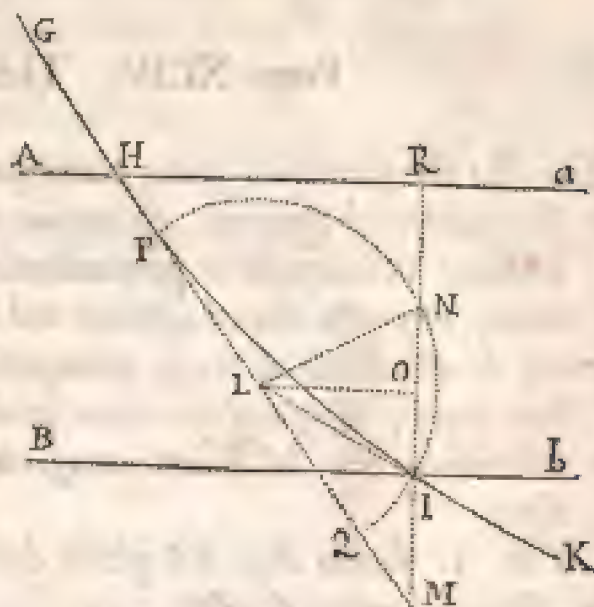
Prop. XCIV. Theor. XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinq; terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano distantis ad eandem ipsius partem capitis, ubiq; eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto Aa , Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundam lineam GH , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaq; actione describat lineam curvam HI , & emergat secundum lineam IK . Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendicularum IM , occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M , tum plano incidentiæ Aa in R ; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in L . Centro L intervallo

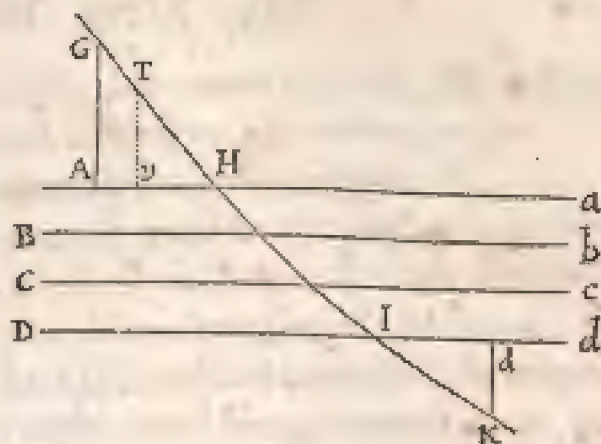


vallo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q , quam MI productam in N ; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bifecabitur in L . Unde si ad M demittatur perpendicularum LO , æquales erunt MO , OR ; & additis æqualibus IO , ON , fient totæ æquales MN , IR . Proinde cum IR detur, datur etiam MN , estq; rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM , hoc est, ad $HMq.$, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ , id est, differentie quadratorum $MLq.$ & $PLq.$ seu $LIq.$; & $HMq.$ datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem $LMq.$: ergo datur ratio $MLq. - LIq.$ ad $MLq.$, & divisim, ratio $LIq.$ ad $MLq.$, & ratio dimidiata LI ad ML . Sed in omni triangulo LMI , sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinum anguli emergentiæ LIR . Q. E. D.



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$ &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo Bb , in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum Bb , erit ad sinum

num emergentiæ ex plano tertio Cc , in data ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto Dd , in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



Prop. XCV. Theor. XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

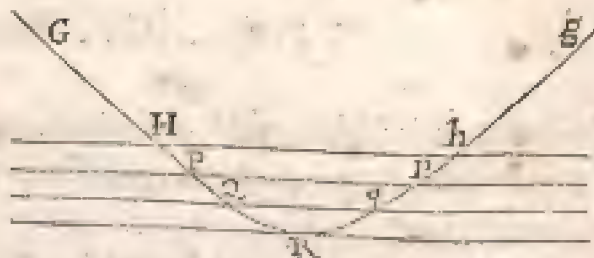
Capiantur AH , Id æquales, & erigantur perpendiculara AG , dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH , IK , in G & K . In GH capiatur TH æqualis IK , & ad planum Aa demittatur normaliter Tv . Et per Legum Corol. 2. distinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa , Bb , Cc &c. perpendiculararem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus agendo secundum lineas perpendiculares nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H , interq; punctum I & lineam dK ; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH , IK .

IK. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH , id est, ut AH vel Id ad ∞H , hoc est (respectu radii TH vel IK) ut sinus emergentiae ad sinum incidentiae. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiae, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet aequalis angulo incidentiae.

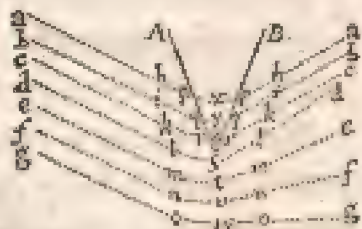
Nam concipe corpus inter plana parallela Aa , Bb , Cc &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintq; arcus illi HP , PQ , QR , &c. Et sit ea lineae incidentiae GH obliquitas ad planum primum Aa , ut sinus incidentiae sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiae ad sinum emergentiae ex plano Dd , in spatium $DdeE$: & ob sinum emergentiae jam factum aequalem radio, angulus emergentiae erit rectus, adeoq; linea emergentiae coincidet cum plano Dd . Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R ; & quoniam linea emergentiae coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum Ee . Sed nec potest idem pergere in linea emergentiae Rd , propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus medium incidentiae. Reverteretur itaq; inter plana Cc , Dd describendo arcum Parabolae QRq , cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilei*) est in R ; secabit planum Cc in eodem angulo in q , ac prius in Q ; dein pergendo in arcubus parabolicis qp , pb &c. arcubus prioribus QP , PH similibus & aequalibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p , b &c. ac prius in P , H &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in b , qua incidit in H . Concipe jam plano-



norum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamecunq; assignatam continua reddatur; & angulus emergentiae semper angulo incidentiae æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (ubi dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosus cubiculum admissa, invenit, & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *g o w o g*, *fn v n f*, *e m t m e*, *d l s l d* sunt radii, arcibus *o w o*, *u v u*, *m t m*, *l s l* versus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debent etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in



vitrum. Fit igitur refraçtio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis $ekzke$, $biyib$, $ahxha$ incidentibus ad r , q , p , & inter k & z , i & y , b & x incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorys corporum trajectorys radiorum persimiles solummodo determinans.



Prop. XCVII. Prob. XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quæsitam; D , E curvæ illius puncta duo quævis; & EF , EG perpendiculara in corporis vias AD , DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E ; & lineæ DF qua AD augetur, ad lineam DG qua DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB ; & propterea si in axe AB sumatur ubivis punctum C , per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM , ad ipsius BC decrementum CN in data ratione; centriq; A , B , &

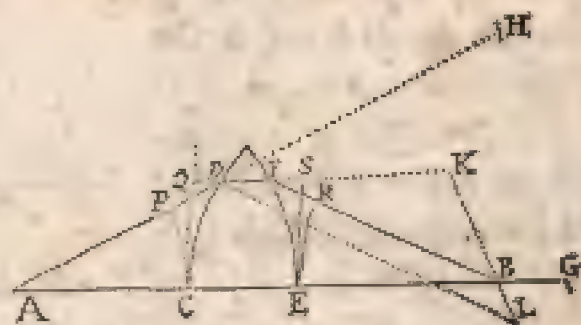
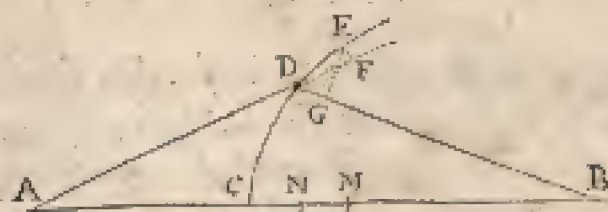
B , & intervallis AM , BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D : punctum illud D tanget curvam quæsitam CDE , eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C , habebuntur figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in *Optica* & *Geometria* ad refractiones exposuit. Quarum inventionem

cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hic propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD , secundum lineam rectam AD lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam

DK , & a puncto C duci intelligantur lineæ curvæ CP , CQ ipsis AD , DK semper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD , QD , atq; adeo lineæ ipsæ PD , QD , incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB descripta superficie quacumq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A excentia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

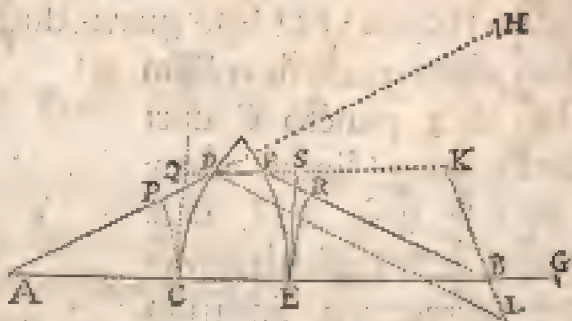
Iuncta AB secet superficiem primam in C & secundam in E,

G g

puncto

puncto D utcumq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficiæ secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N ; produc tum AB ad G ut sit BG ad CE ut $M - N$ ad N , tum AD ad H ut sit AH aequalis AG , tum etiam DF ad K ut sit DK ad DH ut N ad M . Junge KB , & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L , ipsiq; DL parallelam age BF : & punctum F tanget lineam EF , quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas CP , CQ ipsis AD , DF respectivè, & lineas ER , ES ipsis FB , FD ubiq; perpendiculares esse, adeoq; QS ipsi CE semper aequalis; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut MA ad N , adeoq; ut DL ad DK vel FB ad FK ; & divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$; & composite ut $HP - FB$ ad FQ , id est (ob æquales HP & CG , QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M - N$ ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N ; adeoq; divisim FR ad FS ut M ad N , & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. superficies EF cogit corpus in se secundum lineam DF incidens pergere in linea FR , ad locum B . Q. E. D.



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perisporum vitæ Objectiva ex vitis duobus Sphæricæ

ce figuratis & Aquam inter se claudentibus consentur, fieri potest ut a refractionibus aquae errores refractionum, quae sunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis praefrenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri siros accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per figuras vel Sphaericas vel alias quascumque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in ceteris corrigendis imperite collocabitur.

D E

MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS.

S E C T. I.

De Motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistantia amissus est ut spatium movendo confectum.

NAm cum motus singulis temporis particulis amissus sit ut velocitas, hoc est ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur si corpus gravitate omni destitutum in spatiis liberis sola vi insita moveatur, ac detur cum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum, dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

Lem

Lemma. I.

Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue proportionales.

Sit A ad $A - B$ ut B ad $B - C$ & C ad $C - D$ &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

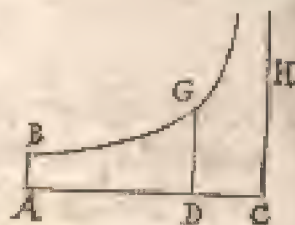
Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & sola vi insita per Medium simile moveatur, sumantur autem tempora equalia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem Geometricam, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas, erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressionem continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediarum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediarum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, sunt in progressionem Geometricam. Minuantur jam æquales illæ temporum particule, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam Casu continue proportionales. Q. E. D.

Cas.

Cas. 2. Et divisum velocitatum differentia, hoc est earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

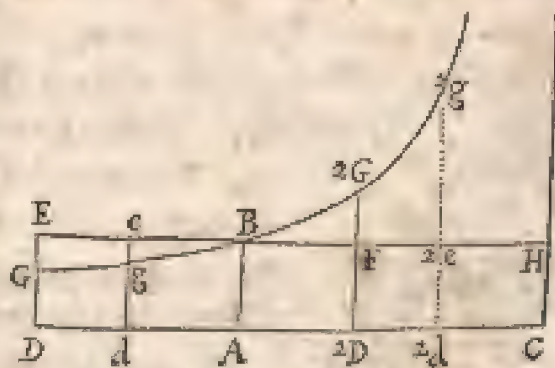
Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis ADC , CH describatur Hyperbola BG , sintq; AB , DG ad Asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistantia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam AC , elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC : exponi potest tempus per aream $ABGD$, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD . Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta DC in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus descriptæ decrescant in eadem ratione.



Prop. III. Prob. I.

Corporis, cui dum in Medio simili recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, desinire motum.

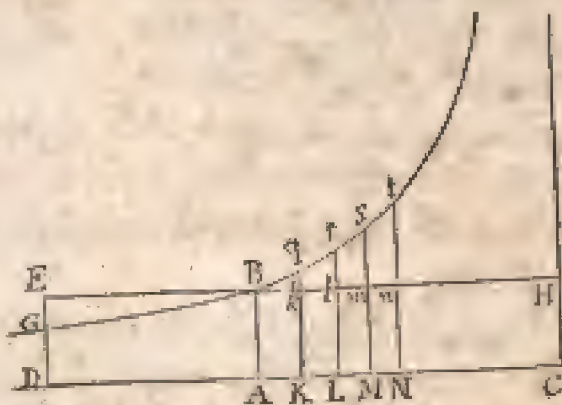
Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BC , & resistantia Medii initio ascensus per rectangulum BD sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis AC , CH , per punctum B describatur Hyperbola secans perpendiculara DE , de in G , g ; & corpus ascendendo, tempore $DGgd$, describet spatium $EGge$, tempore $DGBA$ spatium



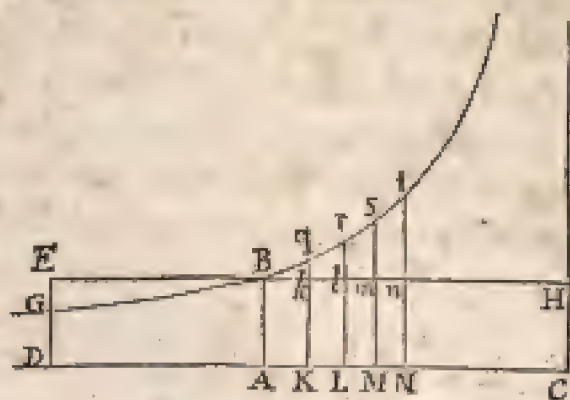
um ascensus totius EGB , tempore $AB \div G \div D$ spatium descen-
sus $BF \div G$, atq; tempore $2D \div G \div g \div d$ spatium descensus
 $2GF \div 2g$: & velocitates corporis (resistentiæ Medii propor-
tionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$,
nulla, $ABF \div D$, $AB \div 2e \div 2d$ respective; atq; maxima velocitas,
quam corpus descendendo potest acquirere, erit BC .

Resolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera
 Ak , Kl , Lm , Mn , &c. quæ sint ut incrementa velocitatum
aqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak , Al ,
 Am , An , &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypothesin)
ut resistentia Medii in

principio singulorum tem-
porum æqualium. Fiat AC
ad AK vel $ABHC$ ad
 $ABkK$, ut vis gravitatis
ad resistentiam in princi-
pio temporis secundi, deq;
vi gravitatis subducantur
resistentiæ, & manebunt
 $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$,
 $NnHC$, &c. ut vires absolute quibus corpus in principio singu-
lorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.)
ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak , Kl , Lm ,
 Mn &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressionem
Geometricam. Quare si rectæ Kk , Ll , Mm , Nn &c. productæ oc-
currant Hyperbolæ in q , r , s , t &c. erunt arcæ $ABqK$, $KqrL$,
 $LrsM$, $MstN$ &c. æquales, adeoque tum temporibus tum vi-
ribus gravitatis semper aqualibus analogæ. Est autem arcæ $ABqK$
(per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq
ut Kq ad kq seu AC ad AK , hoc est ut vis gravitatis ad re-
sistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento arcæ
 $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$
&c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi,



tertiū, quarti, &c. Proinde cum areae æquales $BAKq$, $qK Lr$, $rL M s$, $sM N t$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areae Bkq , $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. resistentiis in medijs singulorum temporum, hoc est, (per Hypothesin) velocitatibus, atq; adeo descriptis spatiis analogæ. Suman- tur analogarum summae, & erunt areae Bkq , Blr , Bms , Bnt , &c. spatiis totis de- scriptis analogæ; necnon areae $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. tem- poribus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $A-BrL$, describit spatium Blr , & tempore $LrtN$ spatium $rlnt$. Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad excessum vis hujus supra vim qua in fine temporis illius resistitur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atq; etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressionem Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentia spatiarum, quæ in æqualibus tempo- rum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressionem Geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiarum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descen- sus initio æquantur inter se.

Prop.

appropinquans ad Asymptoton PLC . Estq; velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL . Q. E. D.

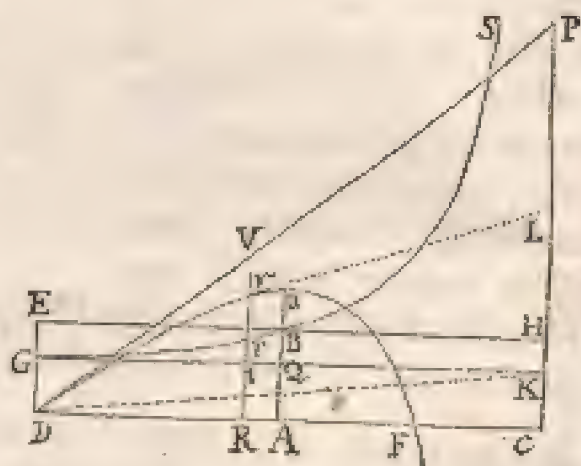
Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV , adeoq;
 RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - rGT}{N}$)

æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per a-

ream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoq; longitudo a motu ad latus descripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR , altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est ut linea Rr . Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoq; linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ (seu

QB) ad N , id est ut CP ad DC ; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atq; Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea Dr a F , quam punctum r perpetuo tangit. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si Vertice D , Diametro DE deorsum producta, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota, ipso motu



tus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP , ut in Medio uniformi resistente describat Curvam $DraF$, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco D , secundum eandem rectam DR , ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ &

Vr est $\frac{GT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem, quæ, si duceretur,

Hyperbolam GTB tangeret in G , parallela est ipsi DK , ideoq; Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est

$\frac{DR \cdot q \cdot x CK \times CP}{2C \cdot D \cdot q \cdot x Q}$, id est (ob proportionales DR & DC , DV & DP) $\frac{DV \cdot q \cdot x CK \times CP}{2DP \cdot q \cdot x QB}$. & Latus rectum $\frac{DV \text{ quad.}}{Vr}$ prodit

$\frac{2DP \cdot q \cdot x QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK , DA & AC)

$\frac{2DP \cdot q \cdot x DA}{AC \times CP}$, adeoq; ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$; hoc

est ut resistentia ad gravitatem. Q. E. D.

Corol. 2. Unde si corpus de loco quovis D , data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur, & resistentia Medii ipso motus initio detur, inveniri potest Curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut est vis Gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP . Dein secando DC in A , ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A . Et inde datur Curva $DraF$.

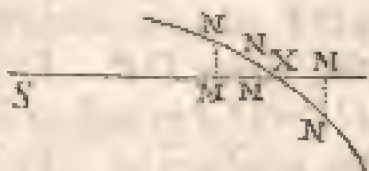
Corol. 3. Et contra, si datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis r . Nam ex data

ta ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistantia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL , datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistantia in loco quovis r .

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistantiam in D ; & ex aucta Velocitate augeatur resistantia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænominis quamproxime, & inde colligendi resistantiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D , secundum angulos diversos CDP , cDp (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f , ubi incidunt in horizontale planum DC . Tum assumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp , fingatur quod resistantia in D sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM . Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta DP , inveniantur longitudines DF, Df , ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per

calculus inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendicularum MN . Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistantiæ ad gravitatem rationem SM , & colligendo novam differentiam MN . Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM , & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam SM .



$SMMM$ in X , & erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo DF per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem DP ut modo inventa longitudo DF ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo DP . Qua inventa, habetur tum Curva Linea $DraF$ quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum corpora resisti in ratione velocitatis Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti posthac demonstrabitur) corpora resistuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

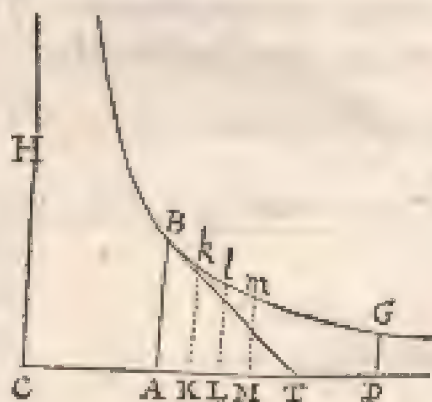
S E C T. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita per Medium simile movetur, tempora vero sumantur in progressionem Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressionem Geometrica inverse, & quod spatia sunt equalia quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionales. Sunt temporis particulae illæ $AK, KL, LM, \&c.$ in recta CD sumptæ, & erigantur perpendiculara $AB, Kk, Ll, Mm, \&c.$ Hyperbolæ $BklmG$, centro C Asymptotis rectangulis CD, CH , descriptæ occurrentia in $B, k, l, m, \&c.$ & erit AB ad Kk ut CK ad CA , & divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA , & vicissim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA , adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk , ut AB q . Et simili argumento erunt



runt $Kk - Ll, Ll - Mm$, &c. ut Kkq, Llq , &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiarum, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiarum, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areae his lineis descriptae sint in progressionem consimili cum spatiis quae velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB , & velocitas initio secundi KL per lineam Kk , & longitudo primo tempore descripta per aream $AKkB$, velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes Ll, Mm , &c. & longitudines descriptae per areas Kl, Lm , &c. & compositae, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM , longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM , &c. ut sint CA, CK, CL, CM , &c. in progressionem Geometricam, & erunt partes illae in eadem progressionem, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm , &c. in progressionem eadem inversam, atque spatia descripta AK, Kl, Lm , &c. aequalia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis AD , & velocitas in principio temporis per ordinatam applicatam AB ; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DC , & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore AD , velocitate prima AB , in Medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capi ndo illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in Medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistantia Medii, statuendo eam ipso motus initio aequalem esse vi uniformi centripetae, quae, in cadente corpore, tempore AC , in Medio non resistente, generare posset velocitatem AB . Nam si ducatur BT quae tangat Hyperbolam
in

in B , & occurrat Asymptoto in T ; recta AT æqualis erit ipsi AC , & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam AB .

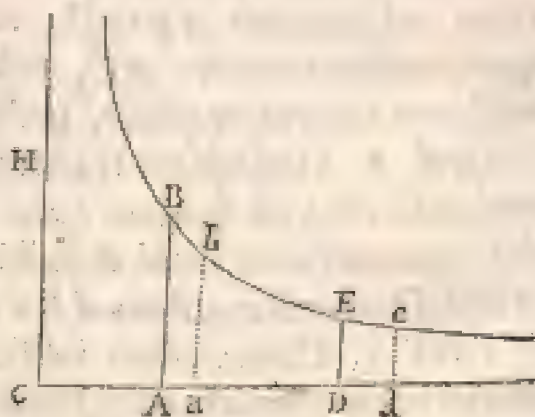
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliasve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus AC , quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis AB ; & inde datur punctum B per quod Hyperbola Asymptotis CH , CD describi debet; ut & spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa AB , tempore quovis AD , in Medio simili resistente describere potest.

Prop. VI. Theor. IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insuis incitata, temporibus que sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis CD , CH descripta Hyperbola quavis $BbEe$ secante perpendiculara AB , ab , DE , de , in B , b , E , e ; exponantur velocitates initiales per perpendiculara AB , DE , & tempora per lineas Aa , Dd . Est ergo ut Aa ad Dd ita (per Hypothesin) DE ad AB , & ita (ex natura Hyperbolæ) CA ad CD ; & componendo, ita Ca ad Cd . Ergo areæ $ABba$, $DEed$, hoc est spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ AB ,



AB , DE sunt ultimis ab , de , & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis $AB-ab$, $DE-de$ proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debet resistentia & corpus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si æquivelocia corpora resistuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujusq; erit ut ejus velocitas & Massa conjunctim, id est ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est ut diameter directe & velocitas inverse; adeoq; spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora resistuntur in ratione sesquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquialtera ratione diametro-

rum, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione resistentiæ diminutæ, & spatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocia corpora resistuntur in ratione dignitatis cujuscunq; diametrorum, spatia quibus Globi homogenei, quibuscunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E ; & si resistentiæ sint ut D^n & E^n , spatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n} . Igitur describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim sub pari velocitate major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione morus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis, spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ, & spatium in ratione temporis.

Lemma. II.

Momentum Genitæ æquatur momenti Terminorum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuscunq; in Arithmetica per multiplicationem, divisionem & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium absq; additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates

tes sunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrecentes hic considero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitarum nominare licet) vel finitæ quavis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Terminum autem cuiusque Generantis coefficientis est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur sensus Lemmatis est, ut si quantitarum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrecentium A, B, C , &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c , &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$; & dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, A^8$, & $A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, A^{-4}, A^{-5}, A^{-6}, A^{-7}, A^{-8}$ momenta $2Aa, 3aA^2, 4aA^3, 5aA^4, 6aA^5, 7aA^6, 8aA^7, 9aA^8$, & $\frac{1}{2}aA^{-1}, \frac{1}{3}aA^{-2}, \frac{1}{4}aA^{-3}, -\frac{1}{2}aA^{-4}, -\frac{2}{3}aA^{-5}, -\frac{3}{4}aA^{-6}, -\frac{4}{5}aA^{-7}, -\frac{5}{6}aA^{-8}$ respective. Et generaliter ut dignitatis cuiuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}-1}$. Item ut Genitæ A quad. $\times B$ momentum fuerit $2aAB + A^2b$; & Genitæ $A^2B^2C^2$ momentum $3aA^2B^2C^2 + 4A^2bB^2C^2 + 2A^2B^2Cc$; & Genitæ A^2B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^2bB^{-3}$; & sic in cæteris. Demonstratur verò Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB , ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB aequale G , & contenti ABC seu GC momentum (per *Cas. 1.*) erit $gC + Gc$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + Ab$) $aBC + AbC + ABc$. Et par est ratio contenti sub lateribus quocunque. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C aequalia; & ipsius A^2 , id est rectanguli AB , momentum $aB + Ab$ erit $2aA$, ipsius autem A^3 , id est contenti ABC , momentum $aBC + AbC + ABc$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1} . Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1 , id est nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A , momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a , per *Cas. 3*: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ five

$2aA$

2a A^{-1} . Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æqualem B , erit A^m æquale B^n , ideoq; $ma A^{m-1}$ æquale $nb B^{n-1}$, & $ma A^{-1}$ æquale $nb B^{-1}$ seu $\frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$, adeoq; $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b , id est æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunq; $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , una cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $ma A^{m-1} + nb B^{n-1}$; idq; siue dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, siue affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sinto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunq; dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compo-
tem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi
Taur-

Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quocunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versa] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

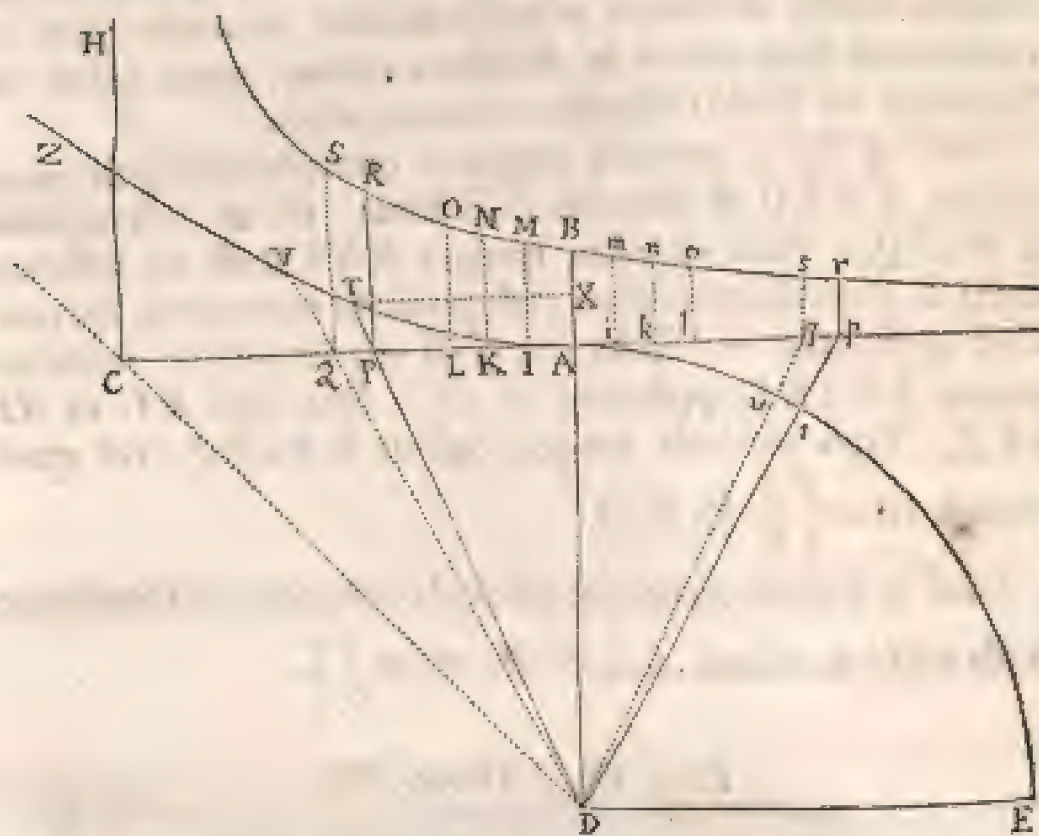
Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistantiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem Geometricam.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC ; resistantia per lineam indefinitam AK ; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC ; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC , ideoque in dimidiata ratione resistantiæ) incrementum resistantiæ data temporis particula factum per lineolam KL , & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ ; & centro C Asymptotis reſtāngulis CA , CH describatur Hyperbola quavis BNS , erectis perpendicularibus AB , KN , LO , PR , QS occurrens in B , N , O , R , S . Quoniam AK est ut AP^2 , erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est ut AP in KC . Nam velocitatis incrementum PQ , per motus Leg. 2. proportionale est vi generanti KC . Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN , & fiet reſtāngulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum reſtāngulum $KC \times KN$, ut AP . Atqui area Hyperbolice

KN

$KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L , est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut AP . Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$,



$KNOL$, &c. & vires absolutæ AC , IC , KC , LC , &c. erunt in progressionem Geometricam. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A , æquales areas $ABmi$, $imnk$, $knol$, &c. constabit quod vires absolutæ AC , iC , kC , lC , &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ lC , kC , iC , AC , IC , KC , LC , &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNK$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas AC , AP & AK respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea AC .

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo spatii particula quam minima $NKLO$ in descensu describitur, est ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam spatium $NKLO$ est ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut spatium illud applicatum ad velocitatem, id est ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad AP . Erat supra KL ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis est ut $KN \times PQ$, vel quod perinde est, ut $\frac{PQ}{CK} \cdot Q$. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo spatii particula $nkl o$ in ascensu describitur, est ut $\frac{PQ}{CK}$.

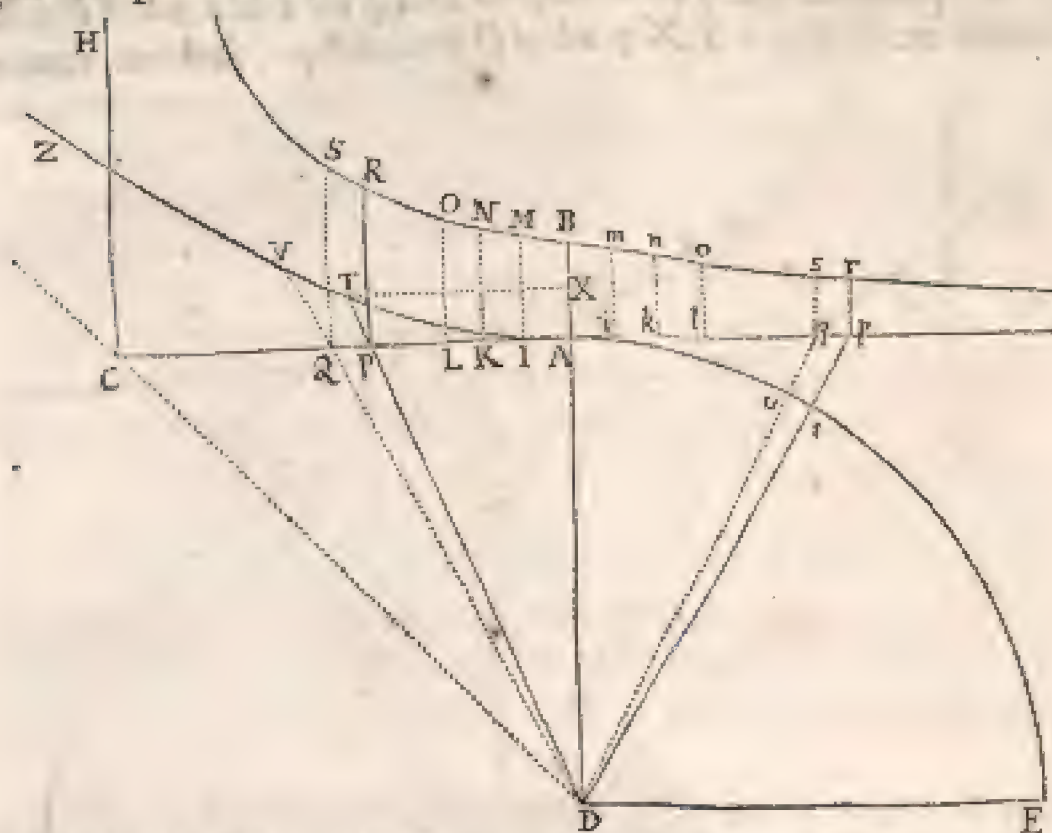
Prop. IX. Theor. VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ AC , qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD . Centro D semidiametro AD describatur tum circuli Quadrans AIE , tum Hyperbola rectangula AVZ axem

axem habens AX , verticem principalem A & Asymptoton $D C$.
Jungantur Dp , DP , & erit Sector circularis $At D$ ut tempus a-
scensus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus ATD ut tempus
descensus omnis prateriti.

Cas 1. Agatur enim Dvq abscindens Sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quam minimas simul descrip-



tas tDv & pDq . Cum particulae illae, ob angulum communem D , sunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pDquad.}$ Sed $pDquad.$ est $ADquad. + Apquad.$ id est $ADquad. + Ak \times AD$ seu $AD \times Ck$; & qDp est $AD \times pq$. Ergo Sectoris particula vDt est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, per Corol. 5, Prop.

VIII. ut particula temporis. Et componendo fit summa particularum omnium $tD\psi$ in S & ore ADt , ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrecentis Ap particulis amissis pq

VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis PQ respondens. Et componendo sit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particula PQ generantur, ut summa particularum Sectoris ADT , id est tempus totum ut Sector totus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC , spatium $ABRP$, quod corpus tempore quovis ATD cadendo describit, erit ad spatium quod corpus semisse velocitatis maximæ AC , eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABRP$, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad arcam ATD qua tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad AK , erit $2APQ$ æquale $AC \times KL$ (per Corol. 1. Lem. II. hujus) adeoque KL ad PQ ut $2AP$ ad AC , & inde LKN ad $PQ \times \frac{1}{2}AD$ seu DPQ ut $2AP \times KN$ ad $\frac{1}{2}AC \times AD$. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC . Ergo ex æquo LKN est ad DTV ut $2AP \times KN \times CK$ ad $\frac{1}{2}AC^3$; id est, ob æquales CKN & $\frac{1}{2}ACq.$, ut AP ad AC ; hoc est ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABKN$ & AVD momenta LKN & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, id est, areæ totæ ab initio genitæ $ABKN$ & AVD ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area ABn ad Sectorem ADt .

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad Sectorem Hyperbolicum ATD . Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus ATD , & in Medio resistente est ut AP , id est ut triangulum APD . Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD , APD .

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum ApD ad Sectorem circulare AtD ; sive ut recta Ap ad arcum At .

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut Sector ADT ad triangulum ADC : & tempus, quo velocitatem Ap in Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus Tangentem Ap .

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per *Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II.* indeq; datur & spatium quod semisse velocitatis illius dato tempore describi potest, & tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporum; dabitur tum velocitas AP vel Ap , tum area $ABKn$ vel $ABkN$, quæ est ad Sectorem ut spatium quæsitum ad spatium jam ante inventum.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABnK$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT .

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitq; resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.

Sit AK planum illud plano Schematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipsa motum; & FCf recta ipsam tangens

gens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progressu impediri a Medio, in regressu æque promoveri, sic ut in iisdem locis eadem semper sit corporis progredientis & regredientis velocitas. Aequalibus autem temporibus describat corpus progrediens arcum quam minimum CG, & corpus regrediens arcum Cg; & sint CH, Cb longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco C exeuntia, his temporibus, absq; Medii & Gravitatis actionibus describerent: & a punctis C, G, g ad planum horizontale AK demittantur perpendiculara CB, GD, gd, quorum GD ac gd tangenti occurrant in F & f. Per Medii resistantiam sit ut corpus progrediens, vice longitudinis CH, describat solummodo longitudinem CF; & per vim gravitatis transfertur corpus de F in G: adeoq; lineola HF vi resistantiæ, & lineola FG vi gravitatis simul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. 1.) lineola FG est ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola HF ut resistantia & quadratum temporis, hoc est ut resistantia & lineola FG. Et inde resistantia sit ut HF directe & FG inverse, sive ut $\frac{HF}{FG}$. Hæc ita se habent in lineolis nascentibus. Nam in lineolis finita magnitudinis hæ rationes non sunt accuratæ.

Et simili argumento est fg ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipsi FG; & impulsus quo corpus regrediens urgetur est ut $\frac{bf}{fg}$. Sed impulsus corporis regredientis



& resistentia progredientis ipso motus initio æquantur, adeoq;
 & ipsis proportionales $\frac{bf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur; & propterea ob æ-
 quales fg & FG , æquantur etiam bf & HF , suntq; adeo CF ,
 CH (vel Cb) & Cf in progressionē Arithmetica, & inde HF se-
 midifferentia est ipsarum Cf & CF ; & resistentia quæ supra fuit
 ut $\frac{HF}{FG}$, est ut $\frac{Cf - CF}{FG}$.

Est autem resistentia ut Medii densitas & quadratum veloci-
 tatis. Velocitas autem ut descripta longitudo CF directe & tem-
 pus \sqrt{FG} inverse, hoc est ut $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$, adeoq; quadratum veloci-
 tatis ut $\frac{CF^2}{FG}$. Quare resistentia, ipsiq; proportionalis $\frac{Cf - CF}{FG}$
 est ut Medii densitas & $\frac{CF^2}{FG}$ conjunctim; & inde Medii densi-
 tas ut $\frac{Cf - CF}{FG}$ directe & $\frac{CF^2}{FG}$ inverse, id est ut $\frac{Cf - CF}{CF^2}$.
 Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod si in Cf capiatur kC æqualis
 CF , & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum
 kz , secans curvam ACK in l ; fiet Medii densitas ut $\frac{FG - kl}{CF \times FG + kl}$.
 Erit enim fC ad kC ut \sqrt{fg} seu \sqrt{FG} ad \sqrt{kl} , & divisim fC ad
 kC , id est $Cf - CF$ ad CF ut $\sqrt{FG} - \sqrt{kl}$ ad \sqrt{kl} ; hoc est (si
 ducatur terminus uterq; in $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$) ut $FG - kl$ ad $kl +$
 $\sqrt{FG} \times kl$, sive ad $FG + kl$. Nam ratio prima nascentium kl
 $+ \sqrt{FG} \times kl$ & $FG + kl$ est æqualitatis. Scribatur itaq;
 $\frac{FG - kl}{FG + kl}$ pro $\frac{Cf - CF}{CF}$; & Medii densitas, quæ fuit ut $\frac{Cf - CF}{CF^2}$,
 evadet ut $\frac{FG - kl}{CF \times FG + kl}$.

Corol.

Corol. 2. Unde cum $2 HF$ & $Cf - CF$ æquantur, & FG & kl (ob rationem æqualitatis) component $2 FG$; erit $2 HF$ ad CF ut $FG - kl$ ad $2 FG$; & inde HF ad FG , hoc est resistentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in $FG - kl$ ad $4 FG$ quad.

Corol. 3. Et hinc si curva linea definiatur per relationem inter basem seu abscissam AB & ordinatim applicatam BC ; (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur: ut in Exemplis sequentibus.

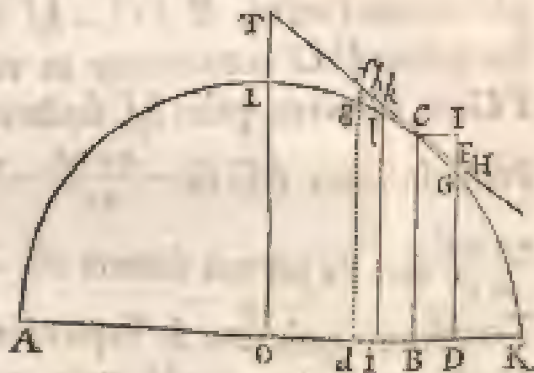
Exempl. 1. Sit Linea ACK semicirculus super diametro AK descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur semicirculi diameter AK in O ; & dic OK n , OB a , BC e , & BD vel Bi o : & erit $DGq.$ seu $OGq. - ODq.$ æquale $nn - aa - 2ao - oo$ seu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum nostram extracta, fiet $DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aao}{2e^2} -$

$\frac{ao^2}{2e^2} - \frac{a^2o^2}{2e^2}$ &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$ & evadet DG

$= e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^2} - \frac{aannoo^2}{2e^2}$ &c.

Hujusmodi Series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum in quo quantitas illa extat unius dimensionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est e , denotabit semper longitudinem ordinatæ BC insistentis ad indefinitæ quantitatis initium B ; secundus terminus



nus qui hic est $\frac{4o}{e}$, denotabit differentiam inter BC & DF , id est lineolam IF , quæ abscinditur complendo parallelogrammum $BC-ID$, atq; adeo positionem Tangentis CF semper determinat: ut in hoc casu capiendo IF ad IC ut est $\frac{4o}{e}$ ad o seu a ad e . Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnno}{2e^3}$ designabit lineolam FG , quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus FCG , seu curvaturam quam curva linea habet in C . Si lineola illa FG finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum subsequenter in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi possunt. Terminus quartus, qui hic est $\frac{annno^3}{2e^4}$, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in solutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF est latus quadratum ex $CIq.$ & $IFq.$ hoc est ex $BDq.$ & quadrato termini secundi. Estq; $FG + kl$ æqualis duplo termini tertii, & $FG - kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipsius DG convertitur in valorem ipsius il , & valor ipsius FG in valorem ipsius kl , scribendo Bi pro BD , seu $-o$ pro $+a$. Proinde cum FG sit $-\frac{nnno}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^4}$ &c. erit $kl = -\frac{nnno}{2e^3} + \frac{annno^3}{2e^4}$ &c. Et horum summa est $-\frac{nnno}{e^3}$, differentia $-\frac{annno^3}{e^4}$.

Terminum quintum & sequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate considerandi veniant. Itaq; si designetur Series universaliter his terminis $+Qo - Roo - So^3$ &c. erit CF æqualis $\sqrt{o^2 + 2Qo^2}$, $FG + kl$ æqualis $2Roo$, & $FG - kl$ æqualis $2So^3$. Pro CF , $FG + kl$ & $IG - kl$ scribantur hi

hi earum valores, & Medii densitas quæ erat ut $\frac{FG - kl}{C \text{ Fin } FG + kl}$

jam fiet ut $\frac{S}{R \sqrt{1 + QQ}}$. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad seriem convergentem, & hic pro Q , R & S scribendo terminos seriei ipsis respondentem; deinde etiam ponendo resistantiam Medii in loco quovis C esse ad Gravitationem ut $S \sqrt{1 + QQ}$ ad $2RR$, & velocitatem esse illam ipsam quacum corpus, de loco C secundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $\frac{1 + QQ}{R}$ habente, deinceps moveri posset,

solvetur Problema.

Sic in Problemate jam solvendo, si scribantur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ seu $\frac{n}{e}$ pro $\sqrt{1 + QQ}$, $\frac{nn}{2e}$ pro R , & $\frac{ann}{2e}$ pro S , prodibit Medii den-

sitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$ seu $\frac{OB}{BC}$, id est ut Tan-

gentis longitudo illa CT , quæ ad semidiametrum OL ipsi AK normaliter insistentem termi-

natur; & resistantia erit ad gra-

vitatem ut a ad n , id est ut

OB ad circuli semidiametrum

OK , velocitas autem erit ut

$\sqrt{2BC}$. Igitur si corpus C

certa cum velocitate, secun-

dum lineam ipsi OK paralles-

lam, exeat de loco L , & Me-

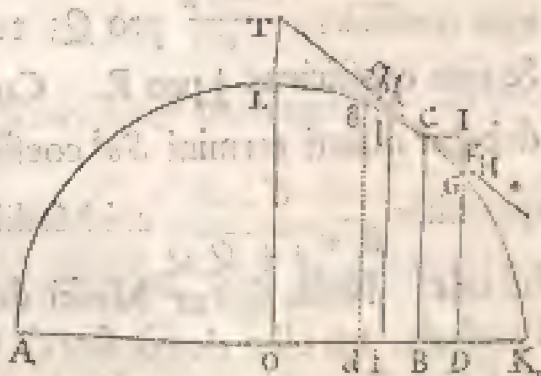
dii densitas in singulis locis C

sit ut longitudo tangentis CT ,

& resistantia etiam in loco aliquo C sit ad vim gravitatis ut OB

ad OK ; corpus illud describet circuli quadrantem LCK . Q. E. I.

At si corpus idem de loco A secundum lineam ipsi AK per-



L I

pen-

pendicularem egrederetur, sumenda esset OB seu a ad contrarias partes centri O , & propterea signum ejus mutandum esset, & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii densitas ut $-\frac{a}{c}$. Negativam autem densitatem (hoc est quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non potest ut corpus ascendendo ab A describat circuli quadrantem AL . Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $ALCK$ Parabola, axem habens OL horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale est rectangulo sub ordinata DG & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa b , AB a , AK c , BC e & BD o ; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+eo-oo$ æquale est rectangulo b in DG , adeoque DG æquale $\frac{ac-aa}{b} + \frac{e-2a}{b}o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{e-2a}{b}o$ pro Qo , & ejus coefficientis $\frac{e-2a}{b}$ pro Q ; tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Ro , & ejus coefficientis $\frac{1}{b}$ pro R . Cum vero plures non sint termini, debet quarti termini So coefficientis S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & queratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Asymptotos altera, ordinatum applicatæ DG pro-

ductæ

ductæ occurrens in V , & ex natura Hyperbolæ, rectangulum

XV in VG

dabitur. Da-

tur autem ra-

tio DN ad

VX , & prop-

terea datur e-

tiam rectan-

gulum DN in

VG . Sit il-

lud bb ; &

completo pa-

rallelogram-

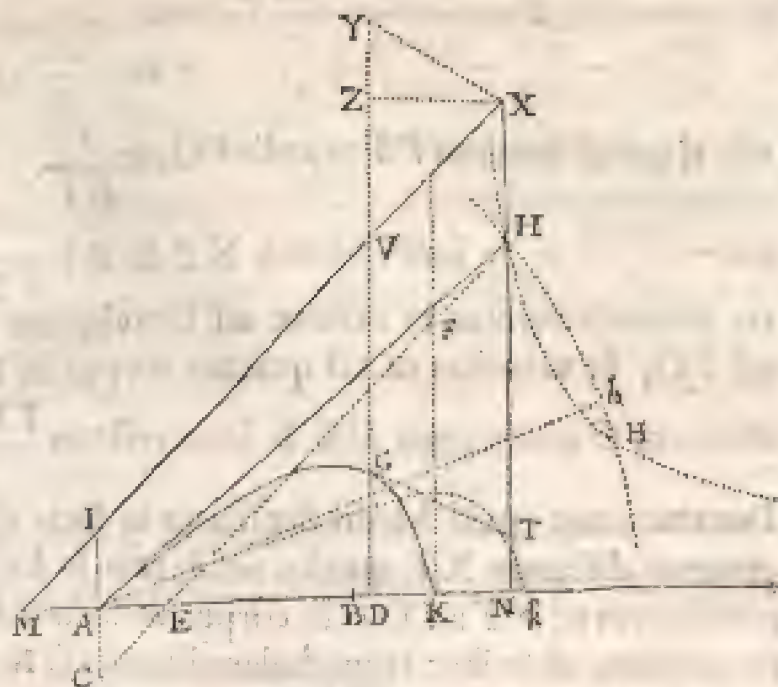
mo $DNXZ$,

dicatur BN

a , BD o , NX

c , & ratio da-

ta VZ ad ZX



vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a - o$, VG æqualis

$\frac{bb}{a - o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n} \frac{bb}{a - o}$, & GD seu $NX - VZ - VG$ æ-

qualis $c - \frac{m}{n} a + \frac{m}{n} o - \frac{bb}{a - o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a - o}$ in seri-

em convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa} o + \frac{bb}{a^2} o^2 + \frac{bb}{a^3} o^3$ &c. & fiet GD æqua-

lis $c - \frac{m}{n} a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{bb}{aa} o - \frac{bb}{a^2} o^2 - \frac{bb}{a^3} o^3$ &c. Hujus seriei ter-

minus secundus $\frac{m}{n} o - \frac{bb}{aa} o$ usurpandus est pro Q , tertius cum fig-

no mutato $\frac{bb}{a^2} o^2$ pro R , & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^3} o^3$

pro S , eorumq; coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^2}$ & $\frac{bb}{a^3}$ scribendæ sunt,

in Regula superiore, pro Q , R & S . Quo facto prodit medii densitas

$$\text{ut } \frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^4} \sqrt{1 - \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}} \text{ seu } \frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}} \text{ id}$$

est, si in VZ sumatur VT æqualis VG , ut $\frac{1}{XY}$. Namq; aa & $\frac{mm}{nn}$

$aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad Gravitationem quam habet XY ad TG , & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem G diametrum DG & latus rectum $\frac{TX \text{ quad.}}{VG}$ habente.

Ponatur itaq; quod Medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantia XY , quodq; resistentia in loco aliquo G sit ad gravitationem ut XY ad TG ; & corpus de loco A iuxta cum velocitate emissum describet Hyperbolam illam AGK . Q. E. I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola sit, centro X . Asymptotis MX , NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD fecet Hyperbolam in G & Asymptoton ejus in V , fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua ND^n , cujus index est numerus n ; & quaeratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro DN , BD , NX scribantur A , O , C respective, sitq; VZ ad ZX vel DN ut d ad e , & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æquale $A - O$, $VG = \frac{bb}{A - On}$, $VZ = \frac{d}{e}$ in $A - O$, & GD seu $NX - VZ$

$= VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O = \frac{bb}{A - On}$. Resolvatur terminus ille

$$\frac{bb}{A - On} \text{ in seriem infinitam } \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbO}{A^{n+1}} + \frac{n \cdot n + n}{2A^{n+2}} bbO^2 + \\ + \frac{n^2 + 3nn + 3n}{6A^{n+3}} bbO^3 \text{ \&c. ac fiet } GD \text{ æqualis } C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} +$$

$+\frac{d}{e}O - \frac{nb b}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO' - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO'$ &c. Hujus

seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nb b}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo ,

tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO'$ pro $R o'$, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO'$ pro

So' . Et inde Medii densitas $\frac{S}{R \times \sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit

$\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque si in VZ capiatur VT

æqualis $n \times VG$, est reciproce ut XY . Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}$

in $A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in

eodem loco G fit ad Gravitationem ut S in $\frac{XY}{A}$ ad $2RR$, id est XY ad

$\frac{3nn+3n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus pro-

jectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & La-

tus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY \text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. Q. E. I.

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente, in Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistantiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hasce quam ad Parabolam. Est utiq; linea illa Hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est

est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducuntur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta GT tangit Hyperbolam in G , ideoq; densitas Medii in G est reciproce ut tangens GT , & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{3nn+3n}{n+2} GV$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum describat Hyperbolam AGK , & AH producta occurrat Asymptoto NX in H , actaq; AI occurrat alteri Asymptoto MX in I : erit Medii densitas in A reciproce ut AH , & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad Gravitationem ut AH ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ in AI . Unde prodeunt sequentes Regulæ.

Reg. 1. Si servetur Medii densitas in A & mutetur angulus NAH , manebunt longitudines AH , AI , HX . Ideoq; si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus NAH tum Medii densitas in A , & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo AH , & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A , gravitalq; acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in A ad gravitationem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicata.

plicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine sit minor, vel Medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ minor est quam in loco A , ut servetur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad Tangentem AH inveniri, & densitas in A , per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam semisummarum Tangentium ad Tangentem AH .

Reg. 5. Si dantur longitudines AH , AI , & describenda sit figura AGK : producat HN ad X , ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI : centroq; X & Asymptotis MX , NX per punctum A describatur Hyperbola, ea lege ut sit AI ad quamvis VG ut XV ad XI .

Reg. 6. Quo major est numerus n , eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab A , & minus accuratæ in ejus descensu ad G ; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estq; cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum K , ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quærat: occurrat producta AN Asymptotis MX , NX in M & N , & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phenominis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem velocitate, in angulis diversis HAK , BAK , incidentq; in planum Horizontis in K & k ; & notetur proportio AK ad Ak . Sit ea d ad e . Tum erecto cujusvis longitudinis perpendicularo AI , assume utcumq; longitudinem AH vel Ab , & inde collige graphice longitudines AK , Ak , per Reg. 6. Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e , longitudo AH recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH , & erige perpendicularum MN æquale

in spatio non resistente, in Parabola Conica, verticem G , diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\sqrt{\frac{2TGq}{nn-nXVG}}$ habente. Et resistantia in G erit ad vim Gravitatis ut TG ad $\frac{3nn-3n}{n-2}VG$. Vnde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medij in A , tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcumq; angulus NAH , manebunt longitudo-nes AH , AI , HX , & inde datur Parabolæ vertex X , & pos- sitio rectæ XI , & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n , dantur omnia Parabolæ puncta G , per quæ Projectile transibit.

S E C T. III.

*De motu corporum quæ resistuntur partim in ratione velocitatis, par-
tim in ejusdem ratione duplicata.*

Prop. XI. Theor. VIII.

*Si corpus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in veloci-
tatis ratione duplicata, & sola vi insita in Medio similiari moveatur,
sumantur autem tempora in progressionem Arithmetica: quantitates ve-
locitatibus reciproce proportionales, quadam quantitate auctæ, erunt
in progressionem Geometrica.*

Centro C , Asymptotis rectangulis CA & CH describatur Hyperbola BE & S , & Asymptoto CH parallelae sint AB , DE , &c. In Asymptoto CD dentur puncta A , G : Et si tempus exponatur per aream Hyperbolicam $ABED$ uniformiter cres- centem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF ; cujus reciproca GD una cum data CG componat longitudi- nem CD in progressionem Geometrica crescentem.

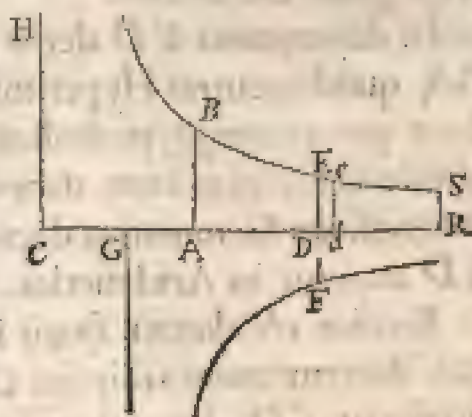
Sit

Sit enim areola DEd datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE , adeoque directe ut CD . Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem.II.)

est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG + GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GDq}$.

Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum E D de uniformiter crescente, decre-

scit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadra-



tum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior

$\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum,

est ut velocitas. Et si quantitas GD ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis quantitate data CG augeatur, summa CD , tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressionem Geometricam. $Q. E. D.$

Corol. 1. Igitur si datis punctis A, G , exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujus-

vis $ABED$, invenietur punctum G . Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressionem Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressionem Geometrica.

In Asymptoto CD detur punctum R , & erecto perpendicularo RS , quod occurrat Hyperbolæ in S , exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD , quæ cum data CG componit longitudinem CD , in Progressione Geometrica decrefcentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola Dd , quæ decrementum est ipsius GD , erit reciproce ut ED , adeoque directe ut CD , hoc est ut summa ejusdem GD & longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula $DdeE$ describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ GD , est ut quantitas data & quantitas decrefcentis conjunctim; & propter analogæ decrefcentia, analogæ semper erunt quantitates decrefcentes: nimirum velocitas & lineæ GD . *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem GD , spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $DES R$.

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , invenietur punctum G , capiendo GD ad GR ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $ABED$ descriptum. Invento autem puncto G , datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3.

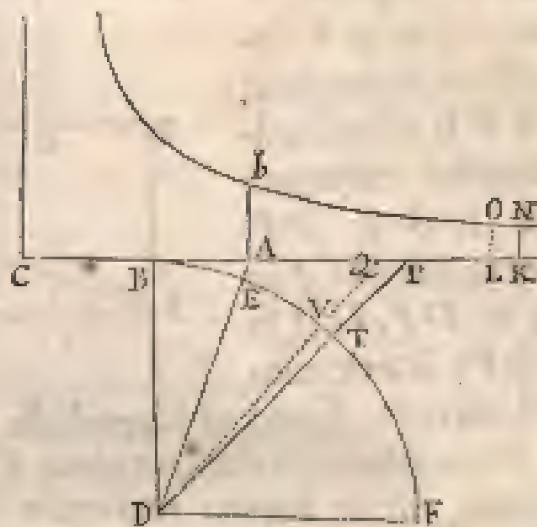
Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod, si Circuli & Hyperbolæ diametris parallele rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ductæ, Tempora erunt ut arearum Sectiores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

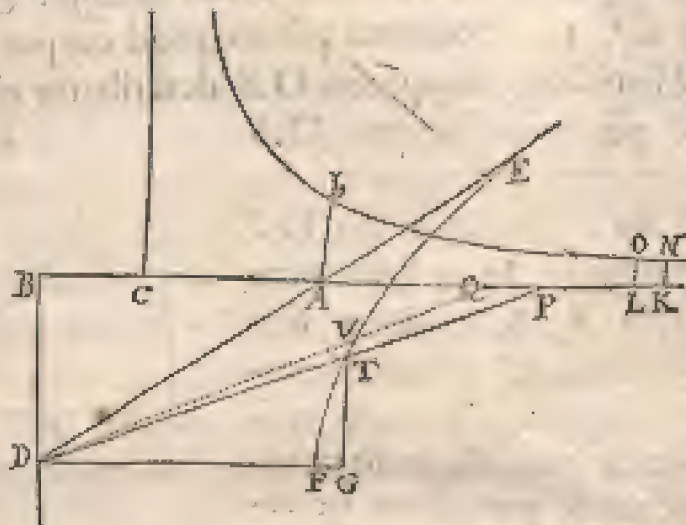
Caf. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & femidiametro quovis DB describatur circuli quadrans $BETF$, & per femidiametri DB terminum B agatur infinita BAP , femidiametro DF parallela. In ea detur punctum A , & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit ut velocitas & pars altera, ut velocitatis quadratum, fit resistentia tota in P ut AP quad. + 2 PAB . Jungantur DA , DP circulum secantes in E ac T , & exponatur gravitas per DA quadratum, ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut $DAq.$ ad $APq. + 2PAB$: & tempus ascensus omnis futuri erit ut circuli sector $EDTE$.

Agatur enim DVQ , abscindens & velocitatis AP momentum PQ , & Sectoris DET momentum DTV dato temporis momen-



to respondens: & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis $DBq.$ & resistentiæ $APq. + 2BAP$, id est (per *Prop. 12. Lib. II. Elem.*) ut DP quad. Proinde area DPQ , ipsi PQ proportionalis, est ut DP quad; & area DTV , (quæ est ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$) est ut datum $DTq.$ Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subtractionem datarum particularum DTV , & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q. E. D.*

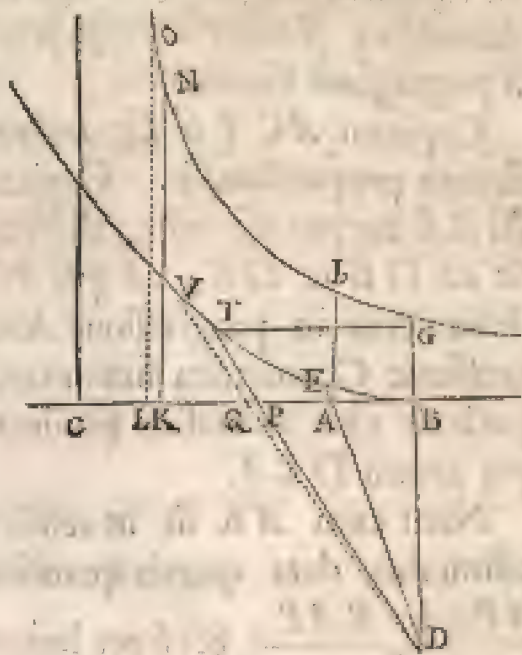
Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq. + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quàm quæ per $DAq.$ exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit $ABq. - BDq.$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur Hyperbola $FTVE$ cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF , quæq; secet DA in E , & DP , DQ in T & V ; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector TDE .



Nam velocitatis decrementum PQ , in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ $APq. + 2ABP$ & gravitatis $ABq. - BDq.$ id est ut $BPq. - BDq.$ Est autem area DTV ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoque, si ad DF demittatur perpendicularum GT , ut $GTq.$ seu $GDq. - DFq.$ ad $BDq.$ utque $GDq.$ ad $PBq.$ & divisim ut $DFq.$ ad $BPq. - DBq.$ Quare cum area DPQ sit ut PQ , id est ut $BPq. - BDq.$ erit area DTV ut datum $DFq.$ Decrescit igitur area EDT uniformiter

miter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum DTV , & propterea temporis proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit AP velocitas in descensu corporis, & $APq. + 2ABP$ resistantia, & $DBq. - ABq.$ vis gravitatis, existente angulo DAB recto. Et si centro D , vertice principali B , describatur Hyperbola rectangula $BETV$ secans productas DA, DP & DQ in E, T & V ; erit Hyperbolæ hujus sector DET ut tempus descensus.



Nam velocitatis incrementum PQ , eiq; proportionalis area DPQ , est ut excessus gravitatis supra resistantiam, id est ut $DBq. - ABq. - 2ABP$ æ $APq.$ seu $DBq. - BEq.$ Et area DTV est ad arcam DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoq; ut $GTq.$ seu $GDq. - BDq.$ ad $BPq.$ utque $GDq.$ ad $BDq.$ & divisum ut $BDq.$ ad $BDq. - BPq.$ Quare cum area DPQ sit ut $BDq. - BPq.$ erit area DTV ut datum $BDq.$ Crescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV , & propterea temporis descensus proportionalis est. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore EDT , in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli DAP ad arcam sectoris centro D , radio DA , angulo ADT descripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas in Medio non resistente, temporis atque adeo Sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut summa vel differentia areae per quam tempus exponitur, & areae cujusdam alterius quae augetur vel diminuitur in progressionem Arithmetica; si vires ex resistantia & gravitate compositae sumantur in progressionem Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistantiae proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quae sit ad DB ut $DBq.$ ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressionem Arithmetica, dum vires CK in progressionem Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areae $AbNK$ supra aream DET .

Nam cum AK sit ut resistantia, id est ut $APq. + 2BAP$; assumatur data quavis quantitas Z , & ponatur AK aequalis $\frac{APq. + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lem. II.) erit ipsius AK momentum KL aequale $\frac{2APQ + 2BA \times PB}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areae $AbNK$ momentum $KLON$ aequale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD \text{ cub.}}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq. + BDq.$ existente BET circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea AC , quae gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq. + BDq.}{Z}$ & $DPq.$ seu $APq. + 2BAP + ABq. + BDq.$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$: ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DTq.$ vel $DBq.$ ad $CK \times Z$.

Cas. 2.

Caf. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas fit ut $ABq - BDq$.
 linea AC (*Fig. Caf. 2. Prop. XIII.*) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$ & DTq .

erit ad DPq . ut DFq . seu DBq . ad $BPq - BDq$. seu APq . +
 $2BAP + ABq - BDq$. id est ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$.
 Ideoque area DTV erit ad arcam DPQ ut DBq . ad $CK \times Z$.

Caf. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea
 gravitas fit ut $BDq - ABq$. & linea AC (*Fig. Caf. 3. Prop.*
preced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad arcam

DPQ ut DBq . ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areae illæ semper sint in hac ratione; si pro area
 DTV , qua momentum temporis sibi met ipsi semper æquale ex-
 ponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta
 $BD \times m$, erit area DPQ , id est $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut
 CK in Z ad BDq . Atq; inde fit PQ in BD cub. æquale
 $2BD \times m \times CK \times Z$, & areae $abNK$ momentum $KLON$ su-
 perius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areae DET mo-

mentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur
 differentia momentorum, id est momentum differentiae area-
 rum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$)

ut velocitas AP , id est ut momentum spatii quod corpus ascen-
 dendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum
 & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decref-
 centia, & simul incipientia vel simul evanescencia sunt proportio-
 nalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua V fumatur in ea ratione ad
 arcum ET , quam habet linea DA ad lineam DE ; spatium
 quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente descri-
 bit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tem-

pore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2 , & ob datas BD & AB , ut $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Tempus autem est ut DET seu $\frac{1}{2} BD \times ET$, & harum arearum momenta sunt ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ ductum in momentum ipsius V & $\frac{1}{2} BD$ ductum in momentum ipsius ET , id est, ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ in $\frac{DAq. \times 2m}{DEq.}$ & $\frac{1}{2} BD \times 2m$, sive ut $\frac{BD \times V \times DAq. \times m}{AB \times DEq.}$ & $BD \times m$. Et propterea momentum areæ V^2 est ad momentum differentie arearum DET & $AKNb$, ut $\frac{BD \times V \times DA \times m}{AB \times DE}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ sive ut $\frac{V \times DA}{DE}$ ad AP ; adeoque, ubi V & AP quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentie quam minimæ arearum DET & $AKNb$. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia; ob eorum analogæ incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia. Q. E. D.

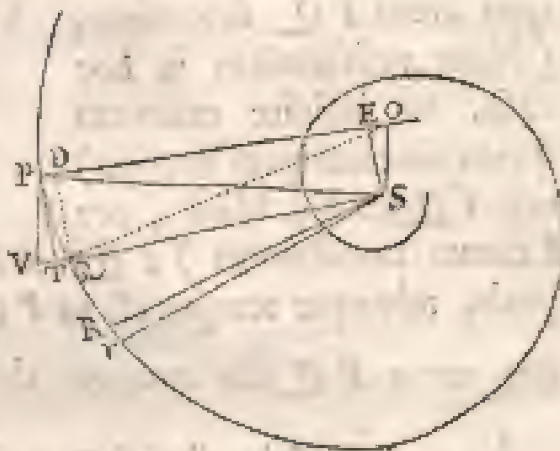
S E C T. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis resistentibus.

L E M. III.

Sit PQR r *Spiralis* quæ secet radios omnes SP , SQ , SR , &c. in æqualibus angulis. Agatur recta PT quæ tangat eandem in puncto quorvis P , secetque radium SQ in T ; & ad Spiralem erectis perpendicularis PO , QO concurrentibus in O , jungatur SO . Dico quod si puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus PSO evadet rectus, & ultima ratio rectanguli $TQ \times PS$ ad PQ quad. erit ratio æqualitatis.

Etenim de angulis rectis OPQ , OQR subducantur anguli æquales SPQ , SQR , & manebunt anguli æquales OPS , OQS . Ergo circulus qui transit per puncta O , S , P transibit etiam per punctum Q . Coeant puncta P & Q , & hic circulus in loco coitus PQ tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam OP . Fiet igitur OP diameter circuli hujus, & angulus OSP in semicirculo rectus. Q. E. D.

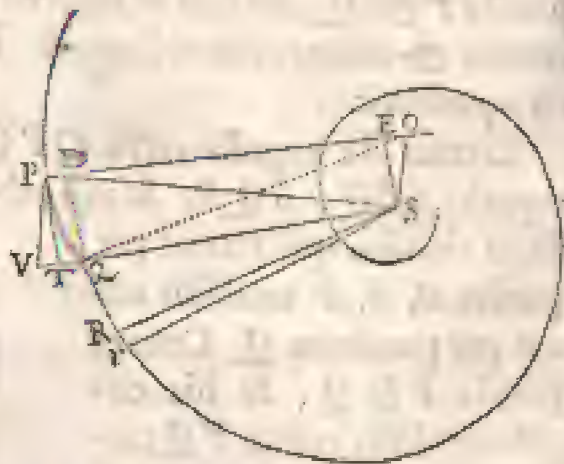


Ad OP demittantur perpendiculara QD , SE , & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: TQ ad PD ut TS vel PS ad PE , seu PO ad PS . Item PD ad PQ ut PQ ad PO . Et ex æquo perturbate TQ ad PQ ut PQ ad PS . Unde fit PQ q. æqualis $PQ \times PS$. Q. E. D.

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producat SQ ad V , ut sit SV æqualis SP . Temporibus æqualibus describat corpus arcus quam minimos PQ & QR , sintque areæ PSQ , QSR æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P est reciproce ut SP $q.$ & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ , quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ describitur, (Nam resistantiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit $TQ \times SP$ $q.$ id est (per Lemma novissimum) PQ $q.$ $\times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus PQ illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu



$\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est in dimidiata ratione ipsius SP reciproce. Et simili argumento velocitas, qua arcus QR describitur, est in dimidiata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est in dimidiata ratione SQ ad SP , sive ut SQ ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$; & ob æquales angulos SPQ , SQR & æquales areas PSQ , QSR , est arcus PQ

PQ ad arcum QR ut SQ ad SP . Sumantur proportionalium consequentium differentia, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - SP \frac{1}{2} \times SQ \frac{1}{2}$, seu VQ ; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - SP \frac{1}{2} \times SQ \frac{1}{2}$ ad VQ fit aequalitatis. In Medio non resistente areae aequales PSQ , Qsr (per Theor. I. Lib. I.) temporibus aequalibus describi deberent. Ex resistantia oritur arearum differentia Rsr , & propterea resistantia est ut lineolae QR decrementum Rr collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr (per Lem. X. Lib. I.) est in duplicata ratione temporis. Est igitur resistantia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$.

Erat autem PQ ad Rr ut SQ ad VQ , & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt; & ob similia triangula PVQ , PSO , fit PQ ad VQ ut OP ad OS . Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistantia, id est in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut

$\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP , densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$.

In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP , corpus gyron potest in hac Spirali. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyron potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP .

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{OS}{OP}$,
sin

sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P , est ad vim centripetam in eodem loco ut OS ad OP . Nam vires illæ sunt ut lineæ Rr & TQ seu ut $\frac{VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{PQ \cdot q}{SP}$ quas simul generant, hoc est ut VQ & PQ , seu OS & OP . Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS , inque hac recta corpus descendet ad centrum, dimidia semper cum velocitate qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in Medio non resistente fieri. Unde tempora descensus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

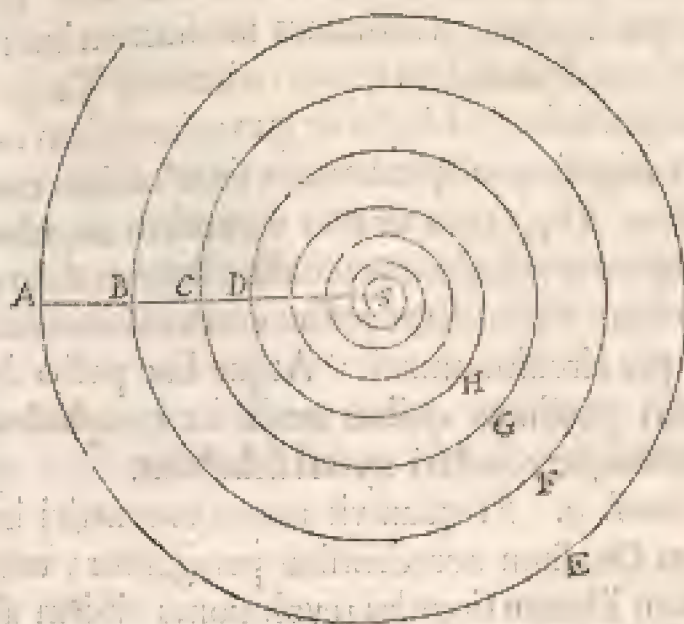
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantibus velocitas eadem est in Spirali PQR atque in recta SP , & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS ; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus datis describantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio PS ; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est reciproce ut Medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa

circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A , idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in dimidiata ratione distantia-

rum a centro (id est ut BS ad mediam proportionalem inter AS & CS ;) corpus illud perget innumeras confimiles revolutiones BFC , CGD , &c. facere, & intersectionibus distinguet Radium AS in partes AS , BS , CS , DS &c. continue proportionales.



Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum AEB , BFC , CGD &c. directe, & velocitates in principiis A , B , C , inverse; id est ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}}$; id est ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}}$, & quam proxime ut AS ad AB . Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quancunque legem assignatam observat. Centro S interval-
lis continue proportionalibus SA , SB , SC &c. describe cir-
culos

culos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime; Sed & in eadem quoque ratione esse Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS , ad tangentem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum secantes ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralem illarum singulas revolutiones eisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in huiusmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliqua distantie locorum a centro, sitque vis centripeta reciproce ut distantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, que radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie SP dignitas qualibet SP^{n+1} cuius index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{1/2}$

& resistantia in P ut $\frac{Rr}{PQ \cdot g \cdot x SP^n}$ sive ut $\frac{VQ}{PQ \cdot x SP^n \cdot x SQ}$, ade-
 que ut $\frac{OS}{SP^n}$. Et propterea densitas in P est reciproce ut
 $OP \cdot x SP^{n+1}$.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæquali-
 ter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo
 parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam
 ex altero non considerata veniat. Resistentiam quoque cæteris
 paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis
 quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque
 augeri vel diminui, ut resistantiæ vel tollatur excessus vel defectus
 suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

*Invenire vim centripetam & Medii resistantiam qua corpus in
 data Spirali data lege revolvitur potest. Vide Fig. Prop. XV.*

Sit spiralis illa PQR . Ex velocitate qua corpus percurrit ar-
 cum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ ,
 quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. De-
 inde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ
 & QSR , differentia RS , dabitur corporis retardatio, & ex re-
 tardatione invenietur resistantia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

*Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis,
 qua corpus datam Spiralem describet.*

Ex vi centripetæ inveniendæ est velocitas in locis singulis, de-
 inde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in
 Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Ad-dendâ jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hæcenus expositi & his affines peraguntur.

S E C T. V.

De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuiusque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. I. In vase sphaerico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes ejusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atq; hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere nisi

niti fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphaericae aequaliter premuntur undique: sic enim *EF* pars sphaerica fluidi, & si haec undique non prematur aequaliter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur aequaliter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundem primum, & additione pressionis novae movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quae duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphaera *EF* non undique premebatur aequaliter. *Q. E. D.*



Cas. 3. Dico praeterea quod diversarum partium sphaerarum aequalis sit pressio. Nam partes sphaericae contiguae se mutuo premunt aequaliter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duae quaevis sphaericae non contiguae, quia pars sphaerica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur aequaliter. Nam partes duae quaevis tangi possunt a partibus Sphaericis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphaericas aequaliter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis aequaliter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars qualibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur aequaliter, partes autem ejus se mutuo aequaliter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque *GHI*, quod undi-

que premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedit idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortioiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedit, idq; in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistantiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis absque motu locali; & subinde, partes fluidi per Casum quintum, se mutuo premunt æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt nisi, quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singule versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.

Sit *D H M* superficies fundi, & *A E I* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *B F K*, *C G L* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cuiusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *A E* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies
secunda

secunda $B F K$ (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda $B F K$ vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia $C G L$. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad



usque summam fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decreseit in ratione quavis assignata distantie a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantis eadem semper est pressionis quantitas, siue superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; siue fluidum a superficie pressa sursum continuatum surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquireret motum: non descenderet, non ascenderet, non cogetur figuram suam mutare. Si Spharicum est manebit spharicum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idq; sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars qualibet internam rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submeritorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquefceret & indueret formam fluidi, hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX. jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis:

suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impediencia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiam si veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutant eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a mo-

tu partium oriatur; nec lædent corporibus immersis, nec sensatio-
nem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressio-
ne condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum
Systematis fluido comprimente circumdati. Systematis partes om-
nes iisdem agitantur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac
solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus flu-
idum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem com-
pressione conglutinandas requiratur.

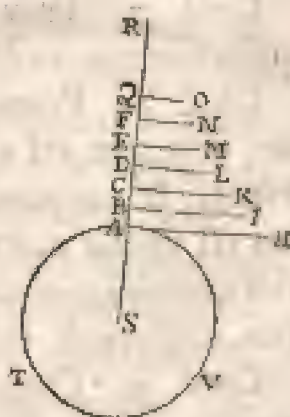
Prop. XXI. Theor. XV.

*Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes
ejus a vi centripeta distantis suis a centro reciproce proportionali de-
orsum trahantur: dico quod si distantie illæ sumantur continue pro-
portionales, densitates fluidi in iisdem distantis erunt etiam continue
proportionales.*

Designet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S
centrum, SA, SB, SC, SD, SE , &c. distantias continue propor-
tionales. Erigantur perpendiculara AH, BI, CK, DL, EM , &c.
quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E ; & specificæ
gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod

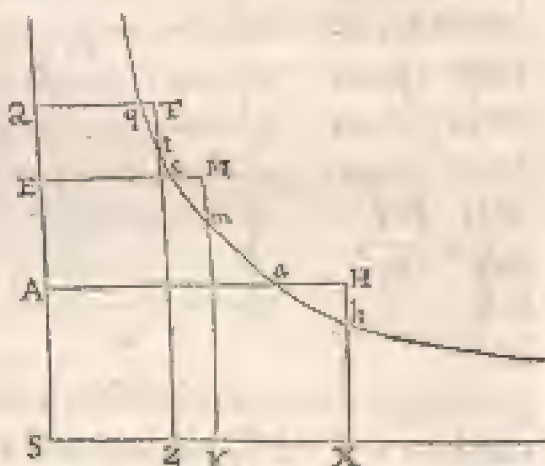
perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$ &c. Finge pri-

imum has gravitates uniformiter continuari ab
 A ad B , a B ad C , a C ad D &c. factis per
gradus decrementis in punctis B, C, D &c. Et
hæ gravitates ductæ in altitudines $AB, BC,$
 CD &c. conficiant pressiones AH, BI, CK , qui-
bus fundum ATV (juxta Theorema XIV.)
urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones
omnes AH, BI, CK, DL , pergendo in in-
finitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH ; &
particula C omnes præter duas primas AH, BI ; & sic deinceps:
adeoque



adeoque particulae primae A densitas AH est ad particulae secundae B densitatem BI ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et BI densitas secundae B , est ad CK densitatem tertiae C , ut summa omnium $BI + CK + DL$, &c. ad summam omnium $CK + DL$, &c. Sunt igitur summae illae differentiae suis AH , BI , CK , &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiae AH , BI , CK , &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis A , B , C sint ut AH , BI , CK , &c. erunt etiam haec continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex aequo) in distantibus SA , SC , SE continue proportionalibus, erunt densitates AH , CK , EM continue proportionales. Et eodem argumento in distantibus quibuscunque continue proportionalibus SA , SD , SQ densitates AH , DL , QO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A , B , C , D , E , &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantibus quibuscunque continue proportionalibus SA , SD , SQ , densitates AH , DL , QT , semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E , colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q . Centro S , Asymptotis rectangulis SQ , SX describatur Hyperbola secans perpendiculara AH , EM , QT in a , e , q , ut & perpendiculara HX , MY , TZ ad asymptoton SX demissa in b , m , & t . Fiat area $ZYmtZ$ ad aream datam $TmbX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EcaA$; & linea Zt producta abscindet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineae SA , SE , SQ sunt continue proportionales, erunt



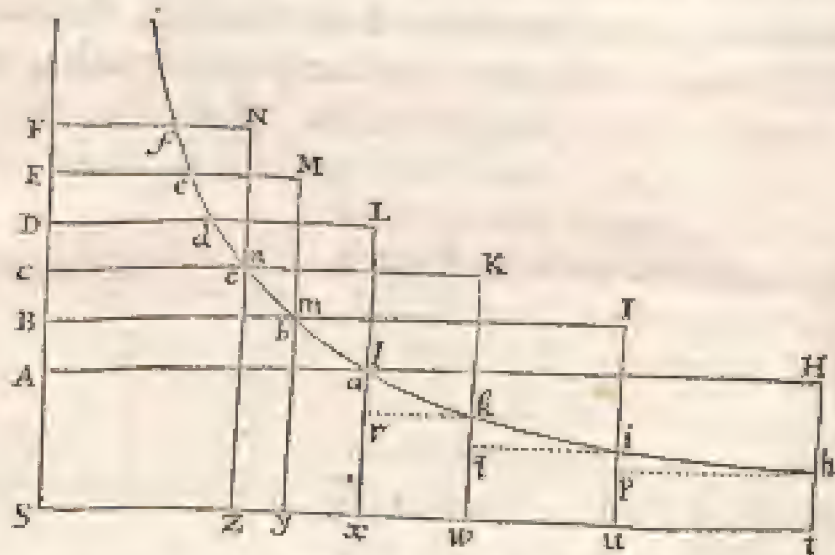
areae $EeqQ$, $EcaA$ æquales, & inde areae his proportionales $YmtZ$, $XbmY$ etiam æquales & lineæ SX , ST , SZ id est AH , EM , QT continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA , SE , SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ AH , EM , QT , ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si distantie sumantur in progressionem Musica, densitates Fluidi in his distantis erunt in progressionem Geometrica.

Designet S centrum, & SA , SB , SC , SD , SE distantias in Progressione Geometrica. Erigantur perpendiculara AH , BI , CK , &c.

quæ sint ut
Fluidi densitates in locis A , B , C , D , E , &c. & ipsius gravitates specicæ in iisdem locis erunt
 AH BI
 $\overline{SAq.}$ $\overline{SBq.}$
 CK , &c. Fin-
 $\overline{SCq.}$



ge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B , secundam a B ad C , tertiam a C ad D , &c. Et hæ ductæ in altitudines AB , BC , CD , DE , &c. vel, quod perinde est, in distantias SA , SB , SC , &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes

ponentes pressionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$ Quare cum densitates sint ut harum pressionum summae, differentiae densitatum $AH - BI, BI - CK, \&c.$ erunt ut summarum differentiae $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}, \&c.$ Centro S Asymptotis SA, SX describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendiculara $AH, BI, CK, \&c.$ in $a, b, c;$ ut & perpendiculara ad Asymptoton SX demissa Ht, In, Kw in $b, i, k;$ & densitatum differentiae $tu, uw, \&c.$ erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \&c.$ Et rectangula $txth, uwi, \&c.$ seu $tp, uq, \&c.$ ut $\frac{AH \times tb}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}, \&c.$ id est ut $Aa, Bb, \&c.$ Est enim ex natura Hyperbolæ SA ad AH vel St , ut tb ad Aa , adeoque $\frac{AH \times tb}{SA}$ æquale Aa . Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æqualis $Bb, \&c.$ Sunt autem $Aa, Bb, Cc, \&c.$ continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb, Bb - Cc, \&c.$ proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula $tp, uq, \&c.$ ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summae rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunt ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summae omnium rectangulorum, puta $xtbn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantie punctorum $A, B, C, \&c.$ in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolice $xtbn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam distantie qualibet, puta SA, SD, SF in Progressione Musica, & differentie $Aa - Dd, Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $tblx, xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz , id est AH, DL, FN , continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta AH & CK , dabitur area $t h k w$ harum differentiarum $t w$ respondens; & inde invenietur densitas FN in altitudine quacunque SP , sumendo aream $t h n z$ ad aream illam datam $t h k w$ ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium

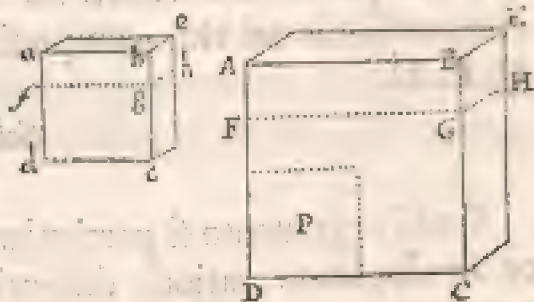
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA , SB , SC , &c. reciproca (nempe $\frac{SA^{\text{cub.}}}{SA^q.}$, $\frac{SA^{\text{cub.}}}{SB^q.}$, $\frac{SA^{\text{cub.}}}{SC^q.}$) sumantur in progressionem Arithmetica; densitates AH , BI , CK , &c. erunt in progressionem Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SA^{qq.}}{SA^{\text{cub.}}}$, $\frac{SA^{qq.}}{SB^{\text{cub.}}}$, $\frac{SA^{qq.}}{SC^{\text{cub.}}}$, &c.) sumantur in progressionem Arithmetica; densitates AH , BI , CK , &c. erunt in progressionem Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantis eadem sit, & distantia sint in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometrica, uti Vir. Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressionem Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantia a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantia. Fingatur quod cubus vis comprimantis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantia, densitas erit reciproce in
selequi-

sesquuplicata ratione distantiae. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiae, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis. Et vice versa, si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantis centrorum.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico ACE , dein compressione redigi in spatium cubicum minus ace ; & particularum similem situm inter se in utro-



que spatio obtinentium distantiae erunt ut cuborum latera AB, ab ; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia $AB cub.$ & $ab cub.$ In latere cubi majoris $ABCD$ capiatur quadratum DP æquale lateri cubi minoris db ; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum DP urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum db urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est $ab cub.$ ad $AB cub.$ Sed pressio qua quadratum DB urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP , hoc est ut $AB quad.$ ad $ab quad.$ Ergo ex æquo pressio qua latus DB urget Fluidum, est ad pressionem qua latus db urget Fluidum, ut ab ad AB . Planis FGH, fgh per media cuborum ductis distinguatur Fluidum in duas partes, & hæc se mutuo prement iisdem viribus

viribus, quibus premuntur a planis AC , ac , hoc est in proportionem ab ad AB : adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulae omnes secundum plana FGH , fgb exercent in omnes, sunt ut vires quas singulae exercent in singulas. Ergo vires, quas singulae exercent in singulas secundum planum FGH in cubo majore, sunt ad vires quas singulae exercent in singulas secundum planum fgb in cubo minore ut ab ad AB , hoc est reciproce ut distantiae particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiae, id est reciproce ut cuborum latera AB , ab ; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum DB , db ut summæ virium; & pressio quadrati DP ad pressionem lateris DB ut ab quad. ad AB quad. Et ex æquo pressio quadrati DP ad pressionem lateris db ut ab cub. ad AB cub. id est vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiae dignitas quaelibet D^n , cujus index est numerus n ; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis E^{n+2} , cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intellegenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum

rum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulae fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam nisi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exercent, ex huiusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulae cuiusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. Ut si particula unaquæque vi sua, quæ sit reciproce ut distantia locorum a centro suo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vasis similibus aequaliter comprimi & condensari possit, erunt ut quadrata diametrorum vasorum: ideoque vis, qua Fluidum in eodem vase comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi densitatis. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constant, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

S E C T. VI.

De Motu & resistantia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse.

Quo

Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sunt longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculari æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas Materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiae in singulis, tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiae in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

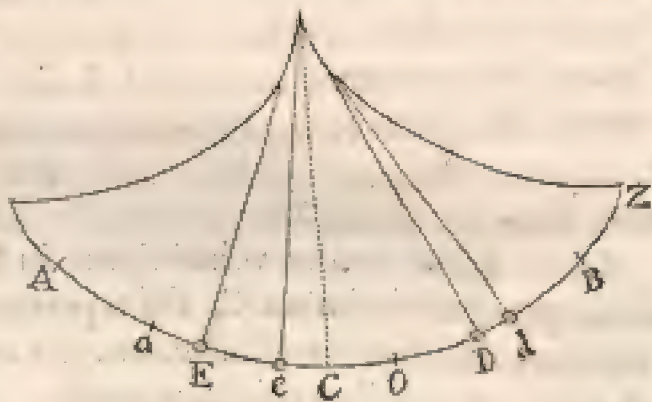
Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quae in Medio quovis resistuntur in ratione momentorum temporis, quaeque in ejusdem gravitatis specifica Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C , ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus CD vel Cd vel CE . Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistantia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO , & sumatur arcus Od in ra-

tione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB : & vis qua corpus in d urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis Cd supra resistantiam CO , exponetur per arcum Od , adeoque erit ad

vim qua corpus D urgetur in Medio non resistente, in loco D , ut arcus Od ad arcum CD ; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB . Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco



Qq

B, &

B , & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OB , erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sinto arcus illi BD & Bd , & arcus reliqui CD , Od erunt in eadem ratione. Proinde vires ipsis CD , Od proportionales manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD , Od semper erunt ut arcus toti CD , OB , & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D , d simul pervenient ad loca C & O , alterum quidem in Medio non resistente ad locum C , & alterum in Medio resistente ad locum O . Cum autem velocitates in C & O sint ut arcus CB & OB ; erunt arcus quos corpora ulterius pergerendo simul describunt, in eadem ratione. Sinto illi CE & Oe . Vis qua corpus D in Medio non resistente retardatur in E est ut CE , & vis qua corpus d in Medio resistente retardatur in e est ut summa vis Ce & resistentiæ CO , id est ut Oe ; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE , Oe proportionales arcus CB , OB ; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB ; & propterea si sumantur arcus toti AB , aB in eadem ratione, corpora D , d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis BA , BE proportionales sunt arcuum partes qualibet ED , Bd vel BE , Be quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum C , sed reperitur in puncto illo O , quo arcus totus descriptus aB bisecatur. Et corpus subinde pergerendo ad a , iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in sensu suo a B ad O .

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ resistuntur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo a centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti: resistentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, conferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. Q. E. D.

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula resistuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales A, B ; & resistentia corporis in arcu A , erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B , in duplicata ratione velocitatum, id est ut A quad. ad B quad. quamproxime. Si resistentia in arcu B sit ad resistentiam in arcu A ut rectangulum AB ad A quad. tempora in arcubus A & B forent æqualia

Qq 2

per

per Propositionem superiorem. Ideoque resistantia A quad. in arcu A , vel AB in arcu B , efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in Medio non resistente; & resistantia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est ut arcus A & B . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam si verbi gratia arcus alter sit altero duplo major, differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistantia in descensu corporis qua tempus producit, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistantia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardescunt paulo minus resistuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producit.

Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oscillans resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistantia ad vim gravitatis ut excessus

cessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

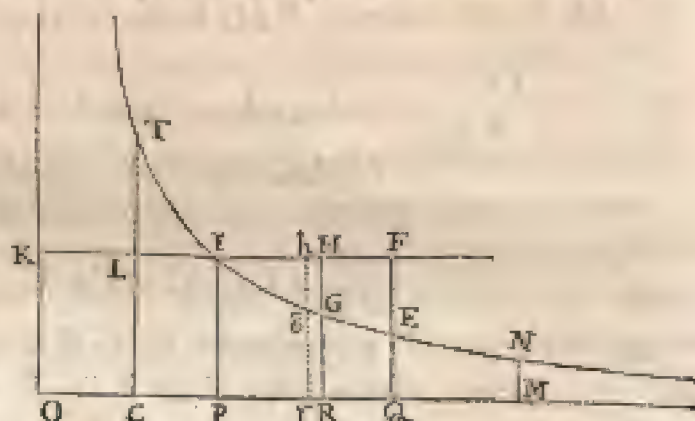
Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum, & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis D , ad vim resistentiæ ut arcus CD ad arcum CO , qui semissis est differentiæ illius Aa . Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum C ad arcum CO ; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa . $Q. E. D.$

Prop. XXIX. Prob. VII.

Posito quod corpus in Cycloide oscillans resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit Ba (Fig. Prop. XXV.) arcus oscillatione integra descriptus, sitque C intimum Cycloidis punctum, & CZ semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & queratur resistentia corporis in loco quovis

D . Secetur recta infinita OQ in punctis O , C , P , Q ea lege ut (si erigantur perpendiculara OK , CT , PI , QE , centroque O & Asymptotis OK , OQ describatur Hyperbola $TIGE$ secans



perpendiculara CT , PI , QE in T , I & E , & per punctum I agatur KF occurrens Asymptoto OK in K , & perpendicularis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam

$PITC$

PITC ut arcus *BC* descensu corporis descriptus ad arcum *Ca* ascensu descriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abscindatur area Hyperbolica *PINM* quæ sit ad aream Hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* descensu descriptum. Et si perpendiculo *RG* abscindatur area Hyperbolica *PIGR*, quæ sit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* descensu toto descriptum: erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream *PIENM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, sint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi sint ut areae *PINM*, *PIEQ*, *PIGR*, *PITC*; exponatur tum arcus tum vires per has areas respectivæ. Sit insuper *Dd* spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehensam; & producat *rg* ad *b*, ut sint *GHbg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areae $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incrementum $GHbg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad aream *PIGR* decrementum *RGgr* seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$: hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ dicatur *T*, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ *T* ut *PIGR* - *T*.

Quod si *V* designet vim a gravitate oriundam arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*; & *R* pro resistentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in *D*, adeoque

adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est autem resistentia R (per Hypothesin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum resistentiae ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est ut spatium data temporis particula descriptum & $V - R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $P I G R$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut $P I G R - Z$.

Igitur area $P I G R$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area T in ratione $P I G R - Z$, & area Z in ratione $P I G R - Z$. Et propterea si areae T & Z simul incipiant & sub initio aequales sint, hae per additionem aequalium momentorum pergent esse aequales, & aequalibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescent, aequalia habebunt momenta & semper erunt aequales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo $C a$, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C , resistentia citius evanesceat quam area T . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus $C D$, $C D$ arcubus $C B$ & $C a$ aquantur, adeoque ubi recta $R G$ incidit in rectas $Q E$ & $C T$.

Et area T seu $\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$ incipit desinitque ubi nulla est,

adeoque ubi $\frac{O R}{O Q} I E F$ & $I G H$ aequalia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta $R G$ incidit in rectam $Q E$ & $C T$. Proindeque areae illae simul incipiunt & simul evanescent, & propterea semper sunt aequales.

Igitur area $\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$ aequalis est areae Z , per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $P I N M$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. $Q. E. D.$

Corol. 1.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ . Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in dimidiata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta a B æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta D erigantur perpendiculara DK, quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcum eorundam sensusumman, æqualis erit area BK a B a perpendicularis omnibus DK occupata, quamproxime.

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem aB , tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB . Bisecetur AB in C , & punctum C representabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in C secundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD , & vis gravitatis per longitudinem penduli; & si in DE capiatur DK in ea ratione ad longi-

seu DR & d componunt. Bisecentur Aa & aB in P & O , & erit $\frac{1}{2} aB$ seu OB æqualis CP , ideoque DR est ad DK ut CP ad CF vel CM , & divisim KR ad DR ut PM ad CP . Ideoque cum punctum M , ubi corpus versatur in medio oscillationis loco O , incidat circiter in punctum P , & priore oscillationis parte versetur inter A & P , posteriore autem inter P & a , utroque in casu æqualiter a puncto P in partes contrarias errans: punctum K circa medium oscillationis locum, id est e regione puncti O , puta in V , incidet in punctum R ; in priore autem oscillationis parte jacebit inter R & E , & in posteriore inter R & D , utroque in casu æqualiter a puncto R in partes contrarias errans. Proinde area quam linea KR describit, priore oscillationis parte jacebit extra aream $BRSa$, posteriore intra eandem, idque dimensionibus hinc inde propemodum æquatis inter se; & propterea in casu priore addita areæ $BRSa$, in posteriore eidem subducta, relinquet aream $BKTa$ areæ $BRSa$ æqualem quam proxime. Ergo rectangulum $Aax\frac{1}{2}aB$ seu AaO , cum sit æquale areæ $BRSa$, erit etiam æquale areæ $BKTa$ quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa , colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia DK , figura $aBKkS$ rectangulum erit sub Ba & DK , & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æqualis erit rectangulo sub Ba & DK , & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propositione XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkS$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA , velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE . Proinde cum Ba in Medio resistente & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates

locitates in singulis ipsius Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA , ut est Ba ad BA ; erit velocitas DK in Medio resistente ut circuli vel Ellipseos super diametro Ba descripti ordinatim applicata; adeoque figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistantia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistantiæ in puncto Medio O ; & Ellipsis, centro O , semiaxibus OB , OV descripta, figuram $aBKV T$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quam proxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est Aa ad OV ut area semicirculi, ad quadratum radii sive ut 11 and 7 circiter: Et propterea: $\therefore Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistantia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistantia DK sit in duplicata ratione velocitatis, figura $BKTVa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV , ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli sub Ba & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub Ba & Aa æquale rectangulo sub Ba & OV , adeoque OV æqualis $\frac{2}{3} Aa$, & propterea corporis oscillantis resistantia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{2}{3} Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola congruat cum figura $BKVTa$ in puncto medio V , hæc si ad partem alterutram BKV vel VTa excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oscillantis resistantia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuat in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resi-

stentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2} aB$ & arcuum illorum CB , Ca differentia Aa , æqualis erat areæ BKT . Et area illa, si maneat longitudo aB , augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK ; hoc est in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2} aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi resistentiæ hujus pro longitudine arcus descripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

PROPOSITIO XXXIIII

S E C T. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex æquali particularum numero constent, & particule correspondentes similes sint, singule in uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tanguant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particule ille pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particule unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particule correspondentes, ob similitudinem ita captorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particule correspondentes agitantur,

agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinaciones, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est ut correspondentium particularum diametri in se, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulae describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursum suos primos, & propterea similes occursum, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum densitates ad invicem ut densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate respondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæc similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulae systematum se mutuo agitant, partim ex occurribus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiae sunt ad invicem ut vires totae motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totae acceleratrices & quantitates materiae in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiae particularum correspondentium inverse & quantitates materiae in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiae particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulae vel partis in systemate priore ad diametrum particulae vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiae sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiae sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiae sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiae partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem

tem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcumque projiciantur; vires autem motrices, quibus particulae Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulae distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, projectile resisteretur in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunt igitur Media tria *A, B, C* ex partibus similibus & aequalibus & secundum distantias aequales regulariter dispositis constantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quae sint ad invicem ut *T* & *V*, illae Medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor aequalia *D, E, F, G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V*; resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunt corpora *D* & *F* aequivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro libitu, & idcirco resistentiae corporum aequalium & aequivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad aequalitatem

litem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæc similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moventis eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum, sunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particule se mutuo non fugiunt, siue particule illæ sint plures & minores, siue pauciores & majores, in æqualem materię quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem pariantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; siue Fluida illa ex particulis crassioribus constent, siue ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilem celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particule Fluidorum, propter vires quibus se mutuo fugiunt, moveri nequeant quin simul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter se quam si viribus illis destituerentur; & quo majores sint earum

vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter se: manifestum esse videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ sunt intensiores; & propterea si corporis velocissimi in superioribus Corollariis velocitas diminuat, quoniam resistentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, si modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifestum est quod resistentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam resistentiam conducant, quod particulae motus suos per Fluidum ad maiorem a se distantiam per vires illas propagent; & cum distantia illa minorem habeat rationem ad maiora corpora: manifestum est quod augmentum resistentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus maioribus minoris sit momenti; & propterea, quo corpora sint maiora eo magis accurate resistentia tardescantium decreſcet in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari densitate & vi Elastica, ex particulis minoribus constant. Nam si corpora illa maiora diminuantur, & particulae Fluidi, manente ejus densitate & vi Elastica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio resistentiæ quæ prius: ut ex precedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Laniæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent ubi particule Systematum se mutuo contingunt, si modo particule illæ sint summe lubricæ.

Concipe particulas viribus quibusdam se mutuo fugere, & vires illas in accessu ad superficies particularum augeri in infinitum, & contra, in recessu ab iisdem celerrime diminui & itatim evanescere. Concipe etiam systemata comprimi, ita ut partes eorum se mutuo contingant, nisi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem spatia per quæ vires particularum diffunduntur quam angustissima, ita ut particule se mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter se iidem erunt quam proxime ac si se mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter se ac si essent summe lubricæ, & si impingant in se mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac si essent Elasticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque casu, nisi quatenus perexigua particularum sese non contingentium intervalla diversitatem efficiant: quæ quidem diversitas diminuendo particularum intervalla diminui potest in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent in particulis sese non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo spatia per quæ vires diffunduntur, diminuuntur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis sese contingentibus, exceptis solum differentiis quæ tandem differentiis quibuscvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, assigna differentiam in casu quocunque. Atqui jam probatum est quod differentia minor sit quam data quævis. Ergo differentia falso assignatur, & propterea nulla est. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si Systematum duorum partes omnes quiescant inter se, exceptis duabus, quæ cæteris majores sint & sibi

Si 2

mutuo

mutuo correfpondeant inter cæteras fimiliter fitæ. Hæ fecundum lineas fimiliter pofitas utcunque projectæ fimiles excitabunt motus in Syftematibus, & temporibus proportionalibus pergent fpatia fimilia & diametris fuis proportionalia describere; & refiftentur in ratione compofita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denfitatis Syftematum.

Corol. 2. Unde fi Syftemata illa fint Fluida duo fimilia, & eorum partes duæ majores fint corpora in iifdem projecta: fint autem Fluidorum particulae fumme lubricæ, & quoad magnitudinem & denfitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus fpatia fimilia & diametris fuis proportionalia describere, & refiftentur in ratione Corollario fupiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum refiftitur in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 4. At fi particulae Fluidi non fint fumme lubricæ, vel fi viribus quibuscunque fe mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficiliter fuperabunt refiftentiam, & propterea magis refiftentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

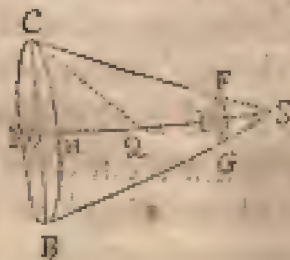
Si Globus & Cylindrus equalibus diametris defcripti, in Medio ræco & Elaftico, fecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celeritate moveantur: erit refiftentia Globi duplo minor quam refiftentia Cylindri.

Nam quoniam refiftentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem eft quam proxime ac fi partes Fluidi viribus nullis fe mutuoingerent, fupponamus partes Fluidi ejusmodi viribus deftitutas per fpatia omnia uniformiter difpergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem eft (per Legum Corol. 5.) five corpus in Medio quiefcente moveatur, five Medii particulae eadem cum veloci-

bE ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus bH occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed solidum prius est Paraboloidis vertice V , axe CA & latere recto CA descriptum, & solidum posterius est cylindrus Paraboloidi circumscriptus: & notum est quod Paraboloidis sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in Cylindrum. Et propterea si particulæ Medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari $CEBH$, quæ centro O , radio OC describitur, & altitudine OD , construendum sit frustum conici $CBGF$, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam maximam suam versus D progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem OD in Q & produc, OQ ad S ut sit QS æqualis QC , & erit S vertex conici cujus frustum queritur.



Unde obiter cum angulus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus FG , GH , HI in punctis F , B & I , ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B , & FG , HI cum eadem GH contineant angulos FGB , BHI graduum 135 : solidum, quod convolutione figuræ $AD FGHIE$ circa axem

em eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediatur, & utriusque terminus B precedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si figura $DNFB$ ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendicularum NM , & a puncto dato G ducatur recta GR



quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N , & axem productum secet in R , fuerit MN ad GR ut GR cub. ad $4BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro & Elastico ab A versus B velocissime movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire resistantiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elastico velocissime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Designet $ABKI$ corpus Sphæricum centro C semidiametro CA descriptum. Producat CA primo ad S deinde ad R , ut sit AS pars tertia ipsius CA , & CR sit ad CS ut densitas corporis Sphærici ad densitatem Medii. Ad CR erigantur perpendiculara PC , RX , centroque R & Asymptotis CR , RX describatur Hyperbola quævis PVT . In CR capiat CT longitudinis cujuscvis, & erigatur perpendicularum TV abscindens aream Hyperbolicam $PCTV$, & sit CZ latus hujus areæ applicatæ ad rectam PC . Dico quod motus quem globus, describendo spatium CZ , ex resistantia Medii amittet, erit ad ejus motum totum sub initio ut longitudo CT ad longitudinem CR quamproxime. Nam

Nam (per motum Legem tertiam) motus quem cylindrus $GNOQ$ circa globum descriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis est motui quem imprimeret in easdem particulas. Ponamus quod particula singula reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate resiliant, quacum cylindrus ad ipsas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. si modo particulae quam minime sint, & vi Elastica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro resiliunt, addita velocitati cylindri componet totam velocitatem duplo maiorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulae cuiusque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum densitas Medii sit ad densitatem cylindri ut CS ad CR ; si Ct sit longitudo tempore quam minimo a cylindro descripta, erit motus eo tempore amissus ad motum totum cylindri ut $2Ct \times CS$ ad $Al \times CR$. Ea enim est ratio materiae Medii, a cylindro protrusae & reflectae, ad massam cylindri. Unde cum globus sit duae terrae partes cylindri, & resistentia globi (per Propositionem superiorem) sit duplo minor quam resistentia cylindri: erit motus, quem globus describendo longitudinem L amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{1}{2} Al \times CR$, sive ut Ct ad CR . Erigatur perpendiculum $t\omega$ Hyperbolae occurrens in ω , & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II.) si corpus describendo longitudinem areae $Ct\omega P$ proportionalem, amittit motus sui totius CR partem quamvis Ct , idem describendo longitudinem areae $CTVP$ proportionalem, amittet motus sui partem CT . Sed longitudo Ct æqualis est $\frac{CP\omega t}{CP}$, & longitudo OZ (per Hypothesin) æqualis est $\frac{CPTV}{CP}$, adeoque longitudo Ct est ad longitudinem CZ ut area $CP\omega t$ ad aream $CPVT$. Et propterea cum globus describendo longitudinem quam minimam Ct amittat motus sui partem, quæ sit ad totum ut Ct ad CR , is describendo

describendo longitudinem aliam quamvis CZ , amittet motus sui partem quæ sit ad totum ut CT ad CR . *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas sub initio, dabitur tempus quo corpus, describendo spatium Ct , amittet motus sui partem Ct : & inde, dicendo quod resistantia sit ad vim gravitatis ut ista motus pars amissa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio resistantiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis supposui quod particulae Fluidi per vim suam Elasticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum sic reflexarum impetus in Globum duplo major sit quam si non reflecterentur: manifestum est quod in Fluido, cujus particulae vi omni Elastica aliaque omni vi reflexiva destituuntur, corpus Sphæricum resistantiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro constructione Problematis hujus superius allata.

Corol. 3. Et si particularum vis reflexiva neque maxima sit neque omnino nulla, sed mediocrem aliquam rationem teneat: resistantia pariter, inter limites in constructione Problematis & Corollario superiore positos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis resistantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc describendo longitudinem quamvis CZ amittent majorem motus sui partem, quam quæ sit ad motum suum totum ut CT ad CR .

Corol. 5. Cognita autem resistantia corporum celerrimorum, innotescet etiam resistantia tardorum; si modo lex decrementi resistantiæ pro ratione velocitatis inveniri potest.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vase dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbens, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo, fundum vasis eadem aquæ pressione eodemve ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per foramen defluat.

Unde consequens est, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbens generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem & motum sibi proportionalem generabit.

Designet igitur F aream foraminis, A altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbens, P pondus ejus, AF quantitatem ejus, S spatium quod dato quovis tempore T in vacuo libere cadendo describeret, & V velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquisierit: & motus ejus acquisitus $AF \times V$ aqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit de foramine, ad velocitatem V ut d ad e ; & cum aqua velocitate V describere posset spatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate sua $\frac{d}{e}V$, describere posset spatium $\frac{2d}{e}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo sit

fit $\frac{2d}{e} S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase; hoc est columna $\frac{2d}{e} SE$. Quare motus $\frac{2dd}{ee} SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus illius generatus, æquabitur motui $AF \times K$. Et si æquales illi motus applicentur ad FV , fiet $\frac{2dd}{ee} S$ æqualis A . Unde est dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2} A$ ad S . Est igitur velocitas quæcum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbens, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S , quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi sursum vertantur; quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum; aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2} A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2} A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminens.

Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbens; consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describet in spatiis non resistentibus Parabolam cuius latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalıs orificium, & cuius diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt axi canalıs.

Hæc omnia de Fluido subtilissimo intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus constet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præsertim si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur; quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur ac si aqua non efflueret; vas sustinebit pondus aquæ totius, non obstante effluxu, sed latus vasis de quo effluit non sustinebit pressionem illam omnem, quam sustineret si aqua non efflueret. Tolleretur enim pressio partis illius ubi perforatur: quæ quidem pressio æqualis est ponderi columnæ aquæ, cujus basis foramini æquatur & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et propterea si vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo suspendatur, hoc, si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluit, recedet semper a perpendiculari in plagam contrariam. Et par est ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefactio implentur, & materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

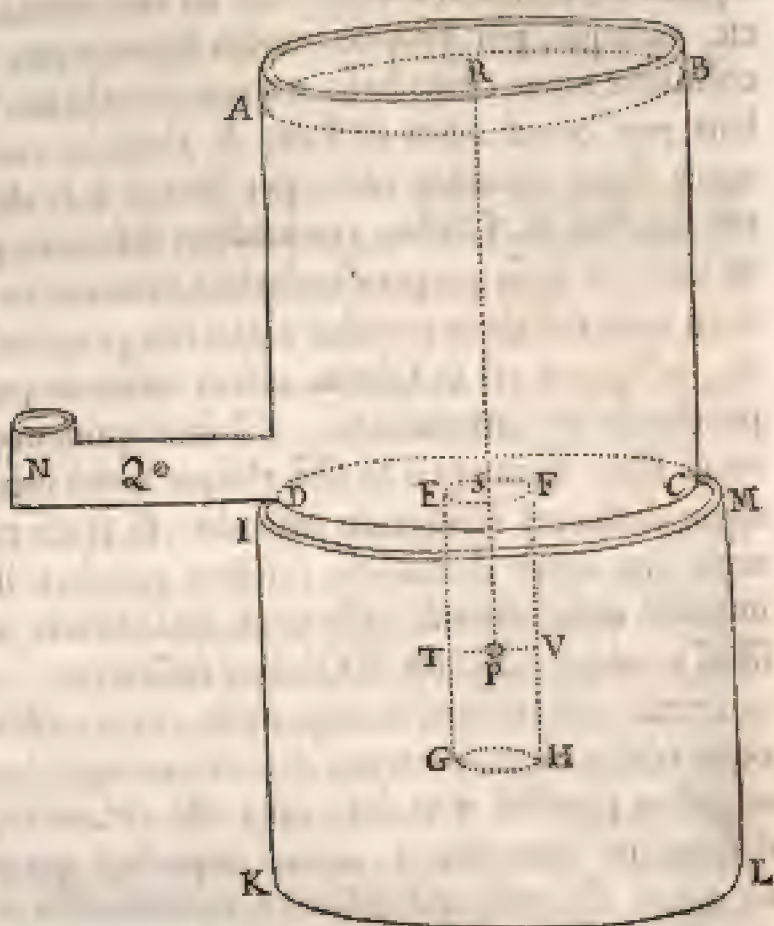
Corporum Spharicorum in Mediis quibusque Fluidissimis resistantiam in anteriore superficie definire.

Defluat aqua de vase Cylindrico $ABCD$, per canalem Cylindricum $EFGH$, in vas inferius $IKLM$; & inde effluat per vasis marginem IM . Sit autem margo ille ejusdem altitudinis cum vasis superioris fundo CD , eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu descendat; & in medio canalis collocetur Globus P , sitque PR altitudo aquæ supra Globum, & SR ejusdem altitudo supra fundum vasis. Sustineatur autem Globus filo tenuissimo TV , lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifestum est per proportionem superiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit; hoc est, si Globus tollatur, ut canalis orificium: sin Globus adsit, ut spatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per superiorem Propositionem) ea erit
quam

quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem SR , acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea ve-

locitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidissimum esse hic supponimus.

Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem tempore



tempore per foramen circulare in fundo vasis, ba si Cylindri illius æquale, descendere posset, & cuius descensus per fundi partem quamvis circularem basi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim sustinent, est pondus aquæ totius in vase, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat, & ad ejus motum generandum sufficit, quæque, per Propositionem superiorem, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis æquatur spatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ supra fundum vasis, per lineam *S R* designata. Vasis igitur fundum & Globus conjunctim sustinent pondus aquæ totius in vase sibi ipsis perpendiculariter imminens. Unde cum fundum vasis sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminens, reliquum est ut Globus etiam sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminens. Globus quidem non sustinet pondus aquæ illius stagnantis & sibi absque omni motu incumbens, sed aquæ defluentis resistendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis sustinet ponderi illi æqualem. Nam impedit descensum & efluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret si Globus tolleretur. Aqua pondere suo, quatenus descensus ejus impeditur, urget obstaculum omne, idæoque obstaculum, quatenus descensum aquæ impedit, vim sustinet æqualem ponderi quo descensus ille efficeretur. Globus autem descensum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ sibi perpendiculariter incumbens efficere posset; & propterea vim aquæ decurrentis sustinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter se, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam descendentem, ad ejus descensum impediendum, in superiora dirigitur, & est ut descendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate sufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis est vi quæ motum eundem vel tollere vel generare possit, *hæc*

hoc est ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo est RS .

Si jam canalis orificium superius obstruatur, sic ut aqua descendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vase inferiore $IKLM$ stagnantis, premetur undique; sed non obstante pressione illa, si ejusdem sit specificæ gravitatis cum aqua, quiescet. Pressio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vase superiore descendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorsum, orietur ab aquæ illius descensu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo est RS & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem istud, quo tempore data qualibet aquæ quantitas, per foramen basi Cylindri circa Globum descripti æquale, sublato Globo effluere posset, sufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo describit duas tertias partes diametri Globi, sufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis descriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis impetus in Globum quiescentem, quo tempore aqua currendo describit duas tertias partes diametri Globi, si uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonstrata sunt, intelligenda sunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quiescens urgetur. Quæque de aqua demonstrata sunt obtinent etiam in Fluidis universis subtilissimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem est, siue Globus quiescat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, siue Fluidum quiescat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea resistentia Globi in Medio quocunque Fluidissimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ describit, æqualis

lis est vi, quæ in corpus ejusdem magnitudinis cum Globo & ejusdem densitatis cum Medio uniformiter impressa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ progrediendo describit, velocitatem Globi in corpore illo generare posset. Tanta est resistentia Globi in superficiei parte præcedente. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si solidum Sphæricum in ejusdem secum densitatis Fluido subtilissimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quiescit; ejusdem resistentia ea erit quam in Corollario secundo Propositionis xxxvi. descripsimus. Unde si computus ineatur, patebit quod solidum dimidiam motus sui partem prius amittet, quam progrediendo descriperit longitudinem diametri propriæ; Quod si inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, si magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt resistentiam projectilium per infinitam divisionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum sit valde crassum, minuetur resistentia aliquantulum per divisionem partium ejus. At postquam competentem Fluiditatis gradum acquisiverit, (qualis forte est Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) resistentia in anteriore superficiei solidi, per ulteriorem partium divisionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura est quam pro limite quem in Corollario superiore assignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia sine sensibili motus diminutione longissime progrediuntur, non solum Fluidissima sunt, sed etiam longe rariora quam sunt corpora illa quæ in ipsis moventur: nisi forte quis dixerit Medium omne Fluidissimum, impetu perpetuo in posticam projectilis partem facto, tantum promoveri motum ejus quantum impedit & resistit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo verisimile est. Nam & experimentis quibusdam factis, reperi quod in Fluidis satis compressis pars aliqua redditur.

Omniem

Omnem vero in casu quocunque reddi nec rationi consentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcumque subtilium, si densa sint, vim ad solida movenda resistendaque permagnam esse, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propositiones duas quæ sequuntur.

Lemmma IV.

Si vas Sphæricum Fluido homogeneo quiescente plenum a vi impressa moveatur in directum, motuque progressivo semper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi inclusi, æqualiter participando motum vasis, quiescent inter se. Idem obtinebit in vase figuræ cujuscunque. Res manifesta est, nec indiget demonstratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbescens progreditur, & cujus partes inter se quiescunt, rapit omnia ejusdem densitatis innataque corpora, & secum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma superius si vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quiescente plenum, motu paulatim impresso progrediatur; Fluidi motum vasis participantis partis omnes semper quiescent inter se. Ergo si Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæc quiescere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quiescunt inter se, perinde est sive fluidæ sint, sive aliquæ earum rigescant. Ergo si vas a vi aliqua extrinsecus impressa moveatur, & motum suum imprimat in Fluidum: Fluidum quoque motum suum imprimet in sui ipsius partes congelatas easque secum rapiet. Sed partes illæ congelatæ sunt corpora solida ejusdem densitates cum Fluido; & par est ratio Fluidi, sive id in vase moto claudatur, sive in spatiis liberis ad modum venti

U u

spiret.

spiret. Ergo Fluidum omne quod motu progressivo accelerato fertur, & cujus partes inter se quiescunt, solida quaecunque ejusdem densitatis inclusa, quæ sub initio quiescebant, rapit secum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire resistantiam solidorum Sphaerarum in Mediis Fluidissimis densitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatnr resistantia ultima solidi specie dati, cujus magnitudo in infinitum augeatur. Dein die: ut ejus motus amissus, quo tempore progrediendo longitudinem semidiametri suæ describit, est ad ejus motum totum sub initio, ita motus quem solidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto subtilissimo, describendo diametri suæ longitudinem amitteret, est ad ejus motum totum sub initio quamproxime. Nam si particula minimæ Fluidi subtiliati eandem habeat proportionem eundemque situm ad solidum datum in eo movens, quem particula totidem minime Fluidi non subtiliati habent ad solidum æquum; utque particula Fluidi utriusque summe lubricæ, & tribus concentricis centripetisque omnino deficiantur; incipiant autem solida temporibus quibuscunque proportionalibus in his Fluidis similiter moveri, & pergent eadem similiter moveri, adeoque quo tempore describunt spacia semidiametris suis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii subtiliati minuantur, & magnitudo solidi in Medio non subtiliato moveris augeatur in infinitum. Ergo ex resistantia solidi æqui in Medio non subtiliato, dabitur per proportionem superiorem resistantia solidi non æqui in Medio subtiliato. *Q. E. I.*

Si particule non sunt summe lubricæ, supponendum est quod in utroque Fluido sunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis resistantia utriusque æqualiter augeatur: & Propositio etiam hinc valebit.

stantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum iere quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 121; ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum 34. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 69, 334, 184, 91 respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tercio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividuntur ex differentia per numerum oscillationum in casu unoquoque; & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{172}$, $\frac{1}{86}$, $\frac{1}{43}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Coro^l. 2. Prop. xxxi. Libri hujus) resistentia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propositionis xxxii. demonstratum est.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A , B , C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV + CV$. Et cum velocitates maximæ in prædictis sex Casibus, sint ut arcuum dimidiorum $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipsi quamproxime, hoc est ut numeri 1, 1, 2, 4, 8, 16: scribimus in Casu secundo quarto & sexto numeros 1, 4, & 16 pro V ; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{172}$ æqualis $A + B + C$ in Casu secundo; & $\frac{2}{354}$ æqualis $4A + 8B + 16C$ in

in casu quarto; & $\frac{8}{9}$ æqualis $16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Unde si per has æquationes determinemus quantitates A, B, C ; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ sint in Cycloïde ut arcus oscillando descripti, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque partibus arcubus majores sint in Cycloïde quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in Cycloïde in velocitatis ratione reciproca: ut ex resistantia in circulo inveniatur resistantia in Trochoïde, debet resistantia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (seu durationem resistantiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id est (si rationes conjungamus) debet resistantia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in casu secundo est 6283 ad 6279, in quarto 12566 ad 12533, in sexto 25132 ad 24869. Et inde resistantia

$\frac{1}{242}$, $\frac{2}{355}$, & $\frac{8}{9}$ evadunt $\frac{6283}{6279 \times 242}$, $\frac{25132}{12533 \times 355}$ & $\frac{201056}{24869 \times 9}$, id est in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A + B + C = 0,004135$; $4A + 8B + 16C = 0,05648$ & $16A + 64B + 256C = 0,8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A = 0,002097$, $B = 0,0002955$ & $C = 0,0030293$. Est igitur differentia arcuum ut $0,002097V + 0,0002955V^{\frac{1}{2}} + 0,0030293V^2$; & propterea cum per Corol. Prop. xxx. resistantia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V , sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2}AV + \frac{1}{16}BV^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}CV^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistantia Globi ad ejus pondus, ut $0,0010485V + 0,0000623V^{\frac{1}{2}} + 0,0015146V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est ad 121 digitos. Unde cum V in casu

casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16; erit resiliencia ad pondus Globi in casu secundo ut 0, 603029 ad 121, in quarto ut 0, 642875 ad 121, in sexto ut 0, 63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Casu sexto descripsit, erat $121 \frac{2}{3}$ seu $119 \frac{5}{24}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum; & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat 124 digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima ob resiliencia Aëris non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur. hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum 62, 59 æque in Cycloide; ad quam motum penduli supra reduximus. & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus perpendiculariter eadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius simili verso æqualem, acquirere posset. Est autem hinc illud verum in Cycloide ad arcum suum 61, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 122, & propterea a parali digitis 15, 272. Quare velocitas eadem est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Unde cum corpus tempore minuti unius secundi cadendo (ut per experimenta pendulorum determinavit *Huygens*) describat pedes *Parisenses* 15, 5, id est pedes *Anglicos* 15, 56 digitos 19, & tempora sint in diuidiata ratione spatorum; Globus tempore minuti 16ter 38quar. cadendo describet 15, 278 digitos, & velocitatem suam prædictam acquireret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata describeret eodem tempore longitudinem duplam 30, 56 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus resiliencia patitur, quæ sit ad eius pondus ut 0, 63013 ad 121, vel (si resiliencia pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 581-2 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi

oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	94	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore feligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione prima $\frac{1}{193} = A + B + C$, in secunda $\frac{2}{94} = 4A + 8B + 16C$, in tertia $\frac{3}{510} = 16A + 64B + 256C$. Quæ æquationes per reductioes superius expositas dant, $A = 0,00145$, $B = 0,00217$ & $C = 0,0009$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus suum unciarum 264, quam habet $0,000923V + 0,000172V^2 + 0,000675V^3$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hac erit ad pondus Globi ut $0,000675V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum 57½, ut $0,00227235V^2$ ad 121; & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut 57½, in $0,00227235$ ad 264 in $0,000675$, id est ut 130309 ad 17719 seu 7½ ad 1. Diametri Globorum duorum erant 6½ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut 47½ & 4, seu $11\frac{1}{4}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ

Globorum

Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistantiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistantia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistantiæ totius minoris penduli, & inde didici quod resistantiæ Globorum, dempta fili resistantia, sunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ ad $1 - \frac{1}{2}$, id est 7 ad $\frac{1}{2}$ seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 , non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{1}{2}$ ad 1 .

Cum resistantia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus, 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a Nodo descriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{2}$, oscillatione mediocri a centro Globi descriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam $0,4475$. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia $0,4475$ diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet $0,4412$. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $67\frac{1}{2}$ ad $124\frac{1}{2}$, differentia ista $0,4412$ augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet $1,509$. Hæc ita se haberent, ex hypothese quod resistantia Penduli esset in duplicata ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{1}{2}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum

um descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313, 9. Rursum ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum 124 $\frac{1}{2}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit $\frac{124\frac{1}{2}}{127}$ in $\frac{8}{9}$ seu $\frac{31}{27}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum 57 $\frac{1}{2}$, producit 48, 55. Duxi autem differentias hæc in pondera Globorum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentie oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 313, 9 & 48, 55. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0, 58172 ad 0, 63013, id est ut 44, 4 ad 48, 55; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti, adeoque partes illæ sunt ut 313, 9 & 44, 4 quamproxime, id est ut 7, 7 ad 1. Sunt autem Globorum diametri 1 $\frac{1}{4}$ & 6 $\frac{5}{8}$; & harum quadrata 35 $\frac{1}{4}$ & 47 $\frac{5}{8}$ sunt ut 7, 38 & 1, id est ut Globorum resistentiæ 7, 07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex tali resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt (paribus Globis) ut quadrata velocitarum, sunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea (per Corollaria Prop. XL. Libri huius) resistentia quam Globi majores & velociore in aere movendo sentiunt, haud multum per infinitam aeris divisionem & subtiliationem diminui potest, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus resistuntur, sunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte sphericus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio vacui ex his dependeat) ut experimenta

perimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere 16½ unciarum, diametro 3½ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum 134½ digitorum.

<i>Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus digitorum.</i>	64	32	16	8	4	2	1	½	¼
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus digitorum.</i>	48	24	12	6	3	1½	¾	¼	⅛
<i>Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum.</i>	16	8	4	2	1	½	¼	⅛	⅞
<i>Numerus oscillationum in aqua.</i>	44	22	11	6	3	2	1	1	1
<i>Numerus oscillationum in aere.</i>	53½	28	14	7	4	2	1	1	1

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 53½ in aere, & 44 in aqua amissi sunt. Erant autem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam 44 oscillationes in aqua, & 41 in aere simul peragebantur. Et propterea si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquveloces, numerus oscillationum 44 in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob resistentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem sim-

plici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1\frac{1}{2}$ in $\frac{17}{12}$ seu $\frac{25}{24}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $\frac{17}{12}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $\frac{17}{12}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $\frac{2}{33}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut 85½ ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque 85½ & 4280 pro resistentiis, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{1}{4}$ & $A = 21\frac{1}{4}$; atque adeo resistentia ut $21\frac{1}{4}V + 64\frac{1}{4}V^2$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21\frac{1}{4} + 64\frac{1}{4}$ seu $85\frac{1}{2}$, ad $64\frac{1}{4}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus considerata venit, ut $85\frac{1}{2}$ ad $64\frac{1}{4}$ & 535 ad $\frac{17}{12}$ conjunctim, id est ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus considerata venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum

rum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediabat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli cumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

<i>Arcus descensus primo descriptus</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus ascensio ultimo descriptus.</i>	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
<i>Arcuum diff. motui amisso proportionalis</i>	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus Oscillationum</i>	$3\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	34	53	$62\frac{1}{2}$

Resistentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire verisimile est, si modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen resistentia tam in aere quam in aqua, si velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo plusquam duplicata, propterea quod in experimentis hic descriptis resistentia minor est quam pro ratione de corporibus velocissimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonstrata. Nam corpora longe velocissima spatium a tergo relinquent vacuum, ideoque resistentia quam sentiunt in partibus precedentibus, nullatenus minuetur per pressionem Medii in partibus posticis.

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars

pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebani vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante invenirem proportionem resistantiarum: & prodit resistantia argenti vivi ad resistantiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi 1 vel 2 partes digiti, prodibat resistantia argenti vivi in ea ratione ad resistantiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immerfi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuforum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistantiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quamproxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari densitate proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in aqua seu dulci seu falsa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Saliis, in Oleo a fœcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam Fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurriendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo resistantiam patitur qua motus sui pars $\frac{1}{10}$, interea dum longitudinem semidi-

ametri

ametri suæ describat (ut jam ante ostensum est) tollatur, sitque densitas aeris ad densitatem aquæ ut 800 vel 850 ad 1 circiter, consequens est ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Spharicum in Medio quocunque satis Fluido moveatur, & spectetur resistentia pars illa sola quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipsius semidiametrorum motu illo uniformiter continuato describat, vel tollere posset vel eundem generare, ut densitas Medii ad densitatem corporis quamproxime. Igitur resistentia quasi triplo major est quam pro lege in Corollario primo Propositionis xxxviii. allata; & propterea partes quasi duæ terræ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, restituantur in Globi partes posticas a Medio in orbem redeunte, inque spatium irruente quod Globus alias vacuum post se relinqueret. Unde si velocitas Globi eoque augeatur ut Medium non posset adeo celeriter in spatium illud inire, quin aliquid vacui a tergo Globi semper relinquatur, resistentia tandem evadet quasi triplo major quam pro Regula generali novissime posita.

Haftenus experimentis uti sumus oscillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius observari & mensurari possint. Motus autem pendulorum in gyrum actorem & in orbem redeundo circulos describentium, propterea quod sint uniformes & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in consilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos prima & ultima revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta

menta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegram rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante Pendulo, supra aciem unci ultrocitraque laberetur. Nam punctum suspensionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxididis metallorum plena. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam

bam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum distracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subsequente donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxididis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxididis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxididis vacui, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxididis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxididis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quæ resistuntur: erit 78 B resistentia pyxididis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxididis vacuæ resistentia tota $A + B$ erit ad pyxididis plenæ resistentiam totam $A + 78 B$ ut 77 ad 78, & divisim $A + B$ ad 77 B ut 77, ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxididis vacuæ in partibus internis quinquies milles minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxididis plenæ oriatur ab actione Fluidi aliqujus subtilis in Metallum inclusum. At causam longe aliam esse opinor. Nam tempora oscillationum pyxididis plenæ minora sunt quam tempora oscillationum pyxididis vacuæ, & propterea resistentia pyxididis plenæ in externa superficie major est, pro ipsius velocitate & longitudine spatii oscillando descripti, quam ea pyxididis vacuæ. Quod cum ita sit, resistentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane insensibilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsum sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxididis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

Eadem methodo qua invenimus resistantiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri potest resistantia corporum figurarum aliarum; & sic Navium figuræ variæ in Typis exiguis constructæ inter se conferri, ut quænam ad navigandum aptissimæ sint, sumptibus parvis tentetur.

S E C T. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI.

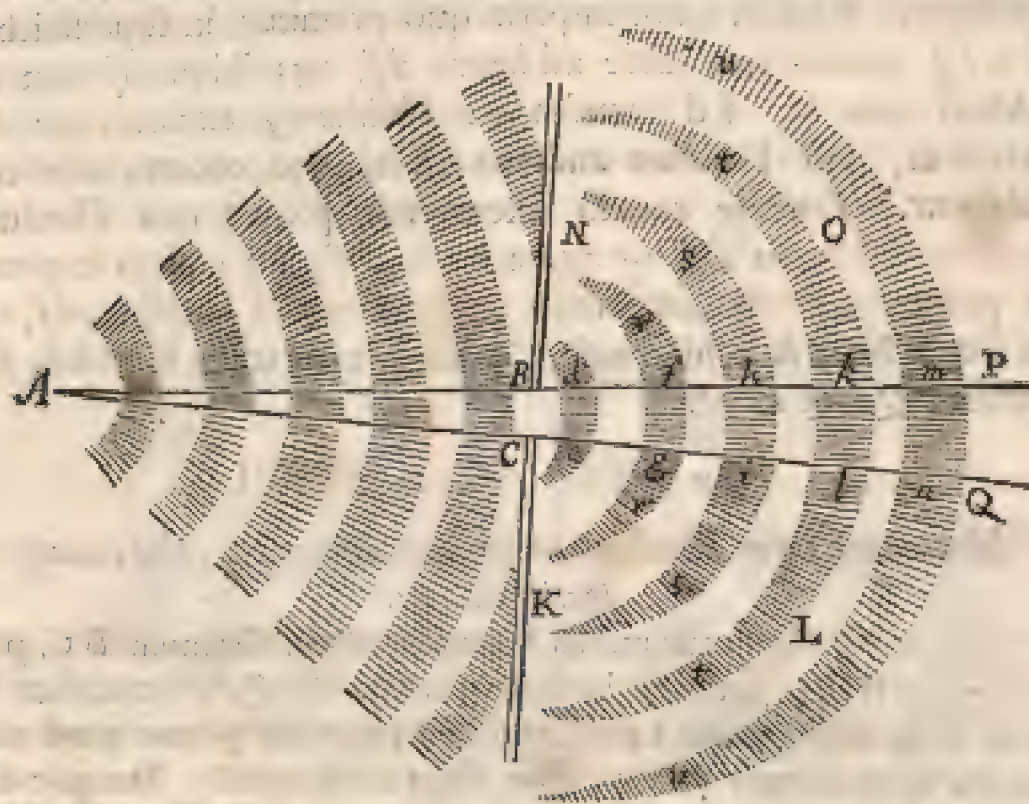
Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particule Fluidi in directum jacent.

Si jaceant particule *a, b, c, d, e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urget particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particule illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *b* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur



tur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si incidit in particulas posteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes incidit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressiois a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam



demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaqua-
versum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstacu-
lo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter par-
tem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit.
Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta

& interea dum conus ABC , pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius $degf$ in superficie de , & hoc frustum urget frustum proximum $fgbi$ in superficie fg , & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum $degf$, reactione frusti secundi $fgbi$, tantum urgebitur & premetur in superficie fg , quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur $degf$ inter Conum Ade & frustum $fgbi$ comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatundique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus de, fg conabitur cedere ad latera df, eg ; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurreret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera df, eg quam frustum $fgbi$ eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus df, eg in spacia NO, KL hinc inde, quam propagatur a superficie fg versus PQ, QED .

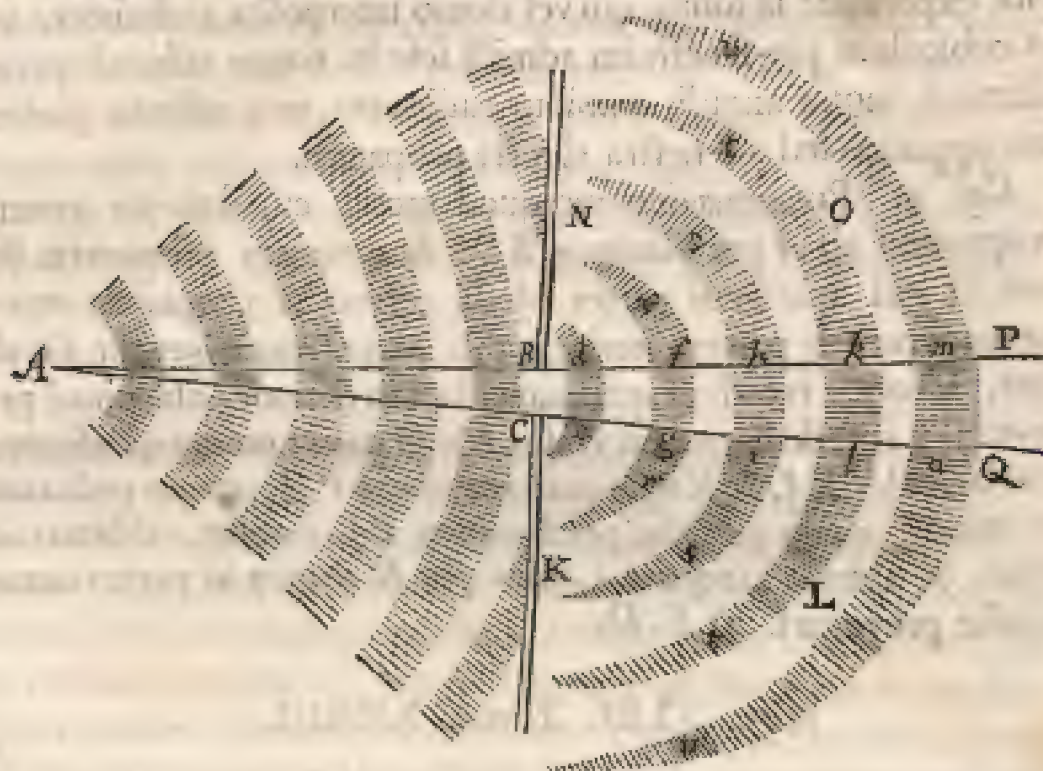
Prop. XLII. Theor. XXXII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spacia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto A per foramen BC , pergatque (si fieri potest) in spatio conico $BCQP$, secundum lineas rectas divergentes a puncto C . Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque de, fg, bi, kl , &c. undarum singularum partes altissima, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis LK, NO , defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l , &c. d, f, b, k , &c. hinc inde versus KL & NO : & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis KL, NO , defluet eadem

eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus KL & NO . Et quoniam motus undarum ab A versus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus KL & NO eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus KL & NO , eadem velocitate qua undæ ipsæ ab A versus PQ recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus KL & NO ab undis dilatatis $efgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, &c occupabitur. $Q. E. D.$ Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod de , fg , hi , kl , mn designent pulsus a puncto A per Medium Elasticum successive propagatos.



Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cuiusque pars densissima Sphericam occupet

occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de, fg, hi, kl, &c.* densissimas pulsuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL, NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem celeritate sese in Medii partes quiescentes *KL, NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL, NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque spatium totum *KLO N* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in sonis, qui vel domo interposita audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppositis sed a fenestra directe propagati.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio ista non fit nisi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes posteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eadem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, ita suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis huius agitabant hæc Medii partes, hæc similibus tremoribus agitatae agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatae agitabunt posteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensantur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis Elasticæ.

Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corpore

poris tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quancunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

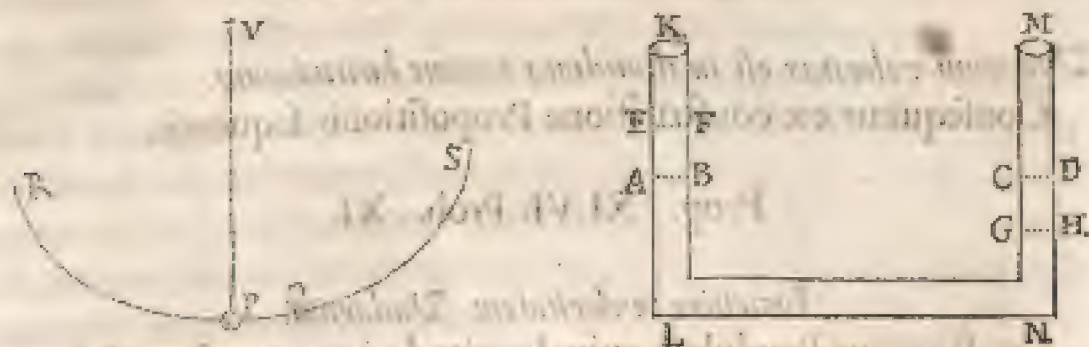
Corol. Hallucinatur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem per Medium ambicis secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ sed a totius dilatatione derivari.

Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

Si Aqua in canalis cruribus erectis KL, MN vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF, descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum,

pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus



acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure KL ascendit ad EF , & in crure altero descendit ad GH , vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ad VP seu PR . Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P , ad Cycloidis longitudinem PR . Quare aquæ & penduli, æqualia spatia AE , PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, si aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendens, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt *Isochronæ*.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{2}$, aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{2}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, auge-
tur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione
dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas est in dimidiata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum suspen-
sionis & centrum oscillationis æquetur latitudini Undarum : & quo
tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Un-
dæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam quæ vel val-
libus imis vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDLEF*
superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac des-
cendentem, sintque *A, C, E, &c.* undarum culmina, & *B, D, F, &c.*
valles intermediæ. Et quoniam motus undarum sit per aquæ suc-
cessivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A, C, E, &c.*
quæ nunc infimæ sunt, mox fiant altissimæ ; & vis motrix, qua
partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus
aquæ elevatae ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit
motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges ob-
servabit : & propterea (per Prop. XLIV) si distantia inter un-
darum loca altissima *A, C, E,* & infima *B, D, F* æquantur duplæ
penduli longitudini, partes altissimæ *A, C, E* tempore oscillatio-
nis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius de-
nuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum
tempus erit oscillationum duarum ; hoc est Unda describet
latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur ;
sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est,
adeoque

adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q.E.D.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* 3^{te} latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficiunt; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes 1831, & horæ spatio pedes 11000 quam proximè.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendant vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius sit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex dimidiata ratione vis Elasticæ directæ & dimidiata ratione densitatis inversæ; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantie in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibilibiter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caf. 2. Sin pulsum distantiae seu longitudines sint maiores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant; & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione dimidiata materiae & ratione dimidiata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquveloces.

Caf. 3. In Mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquveloces. Quod si Mediū vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus fidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione densitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsum erit, in ratione composita ex ratione dimidiata densitatis Mediū inverse & ratione dimidiata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum propagatis, singule Fluidi particule, motu reciproco brevissimo cuntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

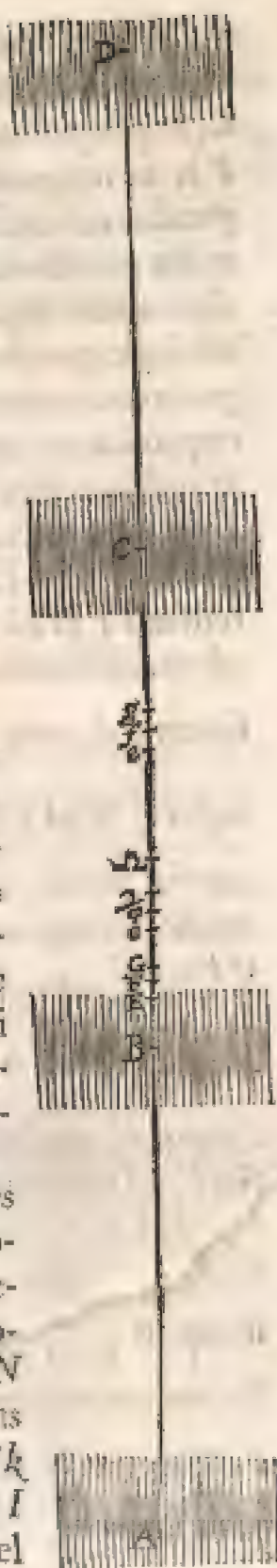
Designent *AB, BC, CD,* &c. pulsum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsum ab *A* versus *B* propagati; *E, F, G* puncta tria Physica Mediū quiescentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee, Ff, Gg*, spatia æqualia

æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; $\epsilon, \varphi, \gamma$ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas Physicas seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca $\epsilon, \varphi, \gamma$ & $\epsilon\varphi, \varphi\gamma$. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS . Bifecetur eadem in O , centroque O & intervallo OP describatur circulus $SIPi$. Per



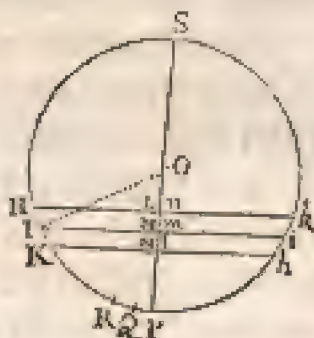
hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSb$, si demittatur ad PS perpendicularum HL vel bl , & capiatur Ee æqualis PL vel Pl , punctum Physicum E reperiatur in ϵ . Hac lege punctum quodvis E eundo ab E per ϵ ad e , & inde redeundo per e ad E iisdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentiâ $PHSb$ capiantur æquales arcus HI, IK vel bi, ik , eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC . Et demissis perpendicularis IM, KN vel im, kn ; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, si PI vel $PHSk$ sit tempus ab initio motus puncti E , erit PI vel



vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F , &
 PK vel $PHSb$ tempus ab initio motus puncti
 G ; & propterea E_6, F_6, G_7 erunt ipsis $PL, PM,$
 PN in itu punctorum, vel ipsis Pn, Pm, Pl in
 punctorum reditu, æquales respective. Unde e_7
 in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in re-
 ditu autem æqualis $EG + Ln$. Sed e_7 latitudo
 est seu expansio partis Medii EG in loco e_7 , &
 propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus
 expansionem mediocrem ut $EG - LN$ ad EG ;
 in reditu autem ut $EG + Ln$ seu $EG + LN$ ad
 EG . Quare cum sit LN ad KH ut IM ad ra-
 dium OP , & EG ad BC ut HK ad circumse-
 rentiam $PHSbP$, & vicissim EG ad HK ut BC
 ad circumferentiam $PHSbP$; id est (si circum-
 ferentia dicatur Z) ut $\frac{OP \times BC}{Z}$ ad OP , & ex
 æquo LN ad EG ut IM ad $\frac{OP \times BC}{Z}$: erit ex-
 pansio partis EG in loco e_7 ad expansionem
 mediocrem quam habet in loco suo primo E_6 , ut
 $\frac{OP \times BC}{Z} - IM$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in itu, utque $\frac{OP \times BC}{Z}$
 $+ im$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in reditu. Unde si $\frac{OP \times BC}{Z}$
 dicatur V , erit expansio partis EG , punctive Phy-
 sici F , ad ejus expansionem mediocrem in itu, ut
 $V - IM$ ad V , in reditu ut $V + im$ ad V ; & ejus-
 dem vis elastica ad vim suam elasticam medio-
 in itu, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$, in reditu ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$.
 Et eodem argumento vires Elasticæ punctorum
 Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V - HL}$ &
 $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii
 vim

vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$
 ad $\frac{1}{V}$. Hoc est (si ob brevitatem pulsuum supponamus HK &
 KN indefinite minores esse quantitate V) ut $\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$,
 five ut $HL - KN$ ad V . Quare cum quantitas V detur, diffe-
 rentia virium est ut $HL - KN$, hoc est (ob proportionales HL -
 KN ad HK , & OM ad OI vel OP , da-
 tasque HK & OP) ut OM ; id est, si Ff bise-
 cetur in Ω , ut $\Omega \phi$. Et eodem argumento dif-
 ferentia virium Elasticarum punctorum Phy-
 sicorum & γ , in reditu lineolæ Physicæ & γ
 est ut $\Omega \phi$. Sed differentia illa (id est excessus
 vis Elasticæ puncti & supra vim elasticam pun-
 cti γ ,) est vis qua interjecta Medii lineola
 Physica & γ acceleratur; & propterea vis ac-
 celeratrix lineolæ Physicæ & γ est ut ipsius distantia a Medio vi-
 brationis loco Ω . Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.)
 recte exponitur per arcum PI ; & Medii pars linearis & γ lege
 præscripta movetur, id est lege oscillantis Penduli: estque par ra-
 tio partium omnium linearium ex quibus Medium torum com-
 ponitur. Q. E. D.



Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem
 sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multipli-
 catur in eorum progressu. Nam lineola Physica & γ , quamprimum
 ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps
 movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu
 pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur.
 Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propa-
 gari desinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii densitate & vi Elastica, invenire velocitatem pulsuum.
 Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris no-
 stri

siri comprimi, sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A : & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione superiore constructa sunt, si linea quævis Physica, EF singulis vibrationibus describendo spatium PS , urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis P & S , a vi Elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini PS æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A , in dimidiata ratione longitudinis; PS seu PO ad longitudinem A . Sed vis Elastica qua lineola Physica EG , in locis suis extremis P , S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis superioris) ad ejus vim totam Elasticam ut $HL - KN$ ad V , hoc est (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V : & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, qua lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG ; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis suis P & S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impellantur, sint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A , in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$ & PO ad A conjunctim;

id

id est (cùm fuerit, in superiore Propositione, V æqualis $\frac{PO \times BC}{Z}$,
 & HK æqualis $\frac{EG \times Z}{BC}$) in dimidiata ratione $\frac{PO qu. \times BC \times EG}{Z}$ ad
 $\frac{EG \times Z \times A qu.}{BC}$ seu $PO qu. \times BC qu.$ ad $Z qu. \times A qu.$ hoc est in ratione
 $PO \times BC$ ad $Z \times A$, seu BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$. Sed tempore vibrationis
 unius ex ita & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit la-
 titudinem suam BC . Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium
 BC , est ad tempus oscillationis unius ex ita & reditu compositæ, ut
 BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$, id est ut BC ad circumferentiam circuli cuius radius
 est A . Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium BC , est ad
 tempus quo percurrit longitudinem huic circumferentiæ æqualem,
 in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percur-
 ret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cuius tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus
 Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spa-
 tium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inven-
 ta erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum.
 Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola
 (per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea
 quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm aeris
 pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus
 quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & gra-

ves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13½ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 348500 digitorum seu pedum *Anglicorum* 29042. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum descripti circumferentia est pedum 182476. Et cum Pendulum digitos 39½ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29042, seu digitos 348500, longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum 188½ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 968. Scribit *Mersennus*, in *Balisticæ suæ Prop. XXXV*. se factis experimentis invenisse quod sonus minutis quinque secundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id est pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* sit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit sonus tempore minuti unius secundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Mersennus Robertvallum* Geometram clarissimum in *Obsidione Theodonis* observasse tormentorum fragorem exaudiri esse post 13 vel 14 ab igne viso minuta secunda, cum tamen vix dimidiam *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque sonus tempore 13 vel 14 secundorum, ex Observatione *Robertvalli*, confecit pedes *Parisienses* 7500, ac tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses* 560, *Anglicos* verò

verò 600 circiter. Multum differunt hæ Observationes ab invicem, & computus noster medium locum tenet. In porticu Collegii nostri pedes 208 longa, sonus in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur, ad priorem ſoni recurſum eundo & ad poſterioſorem redeundo. Longitudinem penduli ſatis accuratè deſignare nequibam: ſed longitudine quatuor digitorum, oſcillationes nimis celeres eſſe, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oſcillatur; id eſt minore tempore quàm 28¹ minutorum tertiorum, & majore quàm 19³; & propterea tempore minuti unius ſecundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 866 & pauciores quàm 1272, atque adeò velocior eſt quàm pro Obſervatione *Robertalli*, ac tardior quàm pro Obſervatione *Merſenni*. Quinetiam accuratioribus poſtea Obſervationibus deſignavi quod longitudo penduli major eſſe deberet quàm digitorum quinque cum ſemille, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd ſonus tempore minuti unius ſecundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus ſonorum, ſecundum calculum Geometricum ſuperius allatum, inter hos limites conſiſtens, quadrat cum Phanomenis, quatenus hætenus tentare licuit. Proinde cum motus ille pendeat ab aeris totius denſitate, conſequens eſt quòd ſoni non in motu ætheris vel aeris cujuſdam ſubtilioris, ſed in aeris totius agitatione conſiſtat.

Refragari videntur experimenta quadam de ſono in vaſis aere vacuis propagato, ſed vaſa aere omni evacuari vix poſſunt; & ubi ſatis evacuantur ſoni notabiliter imminui ſolent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centeſima in vaſe maneat, debet ſonus eſſe centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm ſi quis ſonum eundem in aere libero excitatum audiendo, ſubinde ad decuplam

plam distantiam à corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo æqualiter sonora, quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantia ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris: & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris oblectio cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Merfennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tensus vicibus 104 recurrit spatio minuti unius secundi, quando facit Unisonum cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *Cfa ut*. Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968, quos sonus tempore minuti secundi describit: adeoque pulsus unus occupat spatium pedum 9 $\frac{1}{2}$ circiter; id est duplam circiter longitudinem fistulae. Unde verissimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus à corporibus sonoris, quam cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impediens tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT. IX.

De motu Circulari Fluidorum.

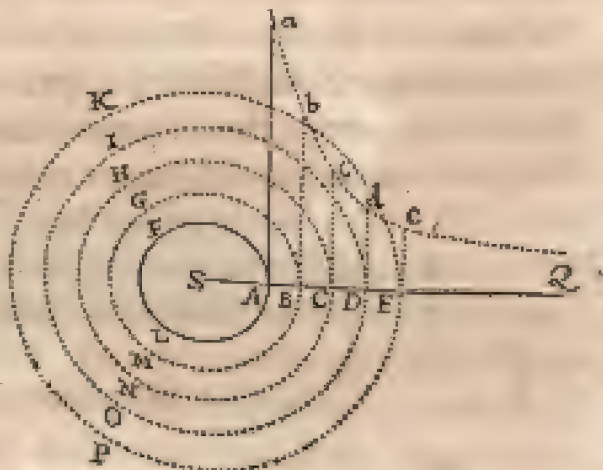
Hypothesis.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in Orbem, perseveret autem fluidi pars unaqueque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantia ab axe cylindri.

Sit *AF L* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneous est Fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est.



est vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, præva-
 lebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit
 prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam diri-
 gitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter
 perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æqua-
 ri, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut
 contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt
 translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut superficierum
 distantia ab axe. Sunt autem differentia motuum angularium cir-
 ca axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translati-
 ones directè & distantia inversè; hoc est (conjunctis rationibus)
 ut quadrata distantiarum inversè. Quare si ad infinitæ rectæ
 $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a$, $B b$, $C c$,
 $D d$, $E e$, &c. ipsarum $S A$, $S B$, $S C$, $S D$, $S E$, &c. quadratis
 reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci
 intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ distantiarum,
 hoc est motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum $A a$,
 $B b$, $C c$, $D d$, $E e$; id est, si ad constituendum Medium uniformiter
 fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuat in infinitum,
 ut area Hyperbolicae his summis Analogæ $A a Q$, $B b Q$, $C c Q$,
 $D d Q$, $E e Q$, &c. & tempora motibus angularibus reciproce pro-
 portionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur
 tempus periodicum particulæ cujusvis D reciproce ut area $D d Q$,
 hoc est (per notas Curvarum quadraturas) directè ut distantia $S D$.
 $Q E D$.

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-
 procè ut ipsarum distantia ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ
 sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ con-
 tineatur, & cylindrum alium interiore contineat, revolvatur
 autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolu-
 tionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars
 unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora peri-
 odica ut ipsarum distantia ab axe cylindrorum. Co-

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuis partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendunt ab attritu. Pars qualibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quàm fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, huius impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab huius impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæra. Fig. Prop. LI.

Cas. 1. Sit *AF L* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur.

guatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentia motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantia inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a, B b, C c, D d, E e$, &c. ipsarum $S A, S B, S C, S D, S E$, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summae distantiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summae linearum $A a, B b, C c, D d, E e$: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut area Hyperbolicae his summis analogæ $A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis $D I O$ reciprocè ut area $D d Q$, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantia $S D$. Id quod volui primò demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis semutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos

nilos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi factò, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege factò, attritus annulorum ad latera nullus est, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quamminimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportionem manebit effectuum proportio, hoc est proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Caterum cum motus circularis, & abinde orta vis centriuga, major sit ad Eclipticam quàm ad polos; debet causa aliqua adesse qua particule singule in circulis suis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam est recedat semper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates

absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente simili & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob maiorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui planè invariata; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphaericas duas qualvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; huius motu raperetur fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua huius globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu huius, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò ob motum

tum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permetterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in se mutuò, perpetuò movebuntur de locis suis; uti in Lemmate superiore expositum est; neq; certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum simile claudatur in vase spherico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintq; eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum & globus servant hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus esse ad summam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per *Corol. 8.* Et motus isti per *Corol. 9.* dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neq; prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica aequalia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in *Corollariis 8. 9 & 10* definiti, nec in alio unquam statu quocunq; perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neq; motus suos in se mutuò per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica aquantur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & aequales, ad aequales semper à se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum

cir-

circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiae fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitatem partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohaerebit & segnior erit, adeoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione superius assignata. Si figura vasis non sit Sphaerica, movebuntur particulae in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figurae, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores; neque tamen particulae velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturae, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulò longius à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulae singulae in perpetuum. Haec ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phaenomena coelestia per Vortices explicari possint. Nam Phaenomenon est quod Planetarum circa Jovem revolvantium tempora periodica sunt in ratione sesquialtera distantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtenent autem hae Regulae in Planetis utrisque quam accuratissime; quatenus observationes Astronomicae hactenus prodidère. Ideoque si Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam

am hi Vortices eadem lege revolvī. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum à centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquialteram reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea est in qua velocitas augeatur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo concessō tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuò celerius juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaq; Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquialteræ per Vortices explicari possit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulae seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neq; quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulae jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam

quam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum fit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm prius; adeoque Vorticis vim illam, quæ prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

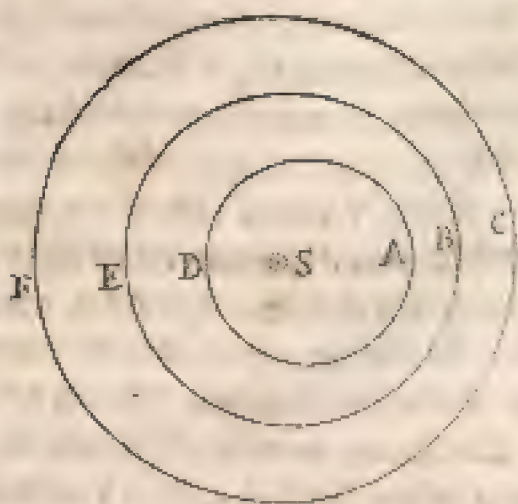
Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsis umbilicum habentibus in Sole, & radius ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extremus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C*. velocius moveri

moveri debeat quàm in spatio latiore inter *D* & *F*; id est in Aphelio velocius quàm in Perihelio. Quae duo repugnant inter se. Sic



in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiae quantitas eodem revo-

lutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia coelesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quàm minorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. Itaq; Hypothesis Vorticum cum Phenomenis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus coelestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Mundi Systemate plenius docebitur.

D E

Mundi Systemate

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transudi in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, author esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit liquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

A a a

Hypo-

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & vera sint & earum Phenomenis explicandis sufficiunt.*

Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eadem sunt causæ.*

Uti respirationis in Homine & in Bestia ; descensûs lapidum in Europa & in America ; Lucis in Igne culinari & in Sole ; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuscunque generis corpus transformari posse, & qualitatum gradus omnes intermedios successivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro quiescere contendunt.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquialtera distantiarum ab ipsius centro.*

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibilibiter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in ratione sesquialtera semidiametrorum orbium consentiunt Astronomici : & *Flamstedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipses Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quin etiam numeris suis mecum communicatis, significavit rationem illam sesquialteram tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensu deprehendere. Id quod ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. 28 $\frac{1}{3}$. 3d. 13h. 17 $\frac{2}{3}$. 7d. 3h. 59 $\frac{1}{2}$. 16d. 18h. 5 $\frac{1}{2}$.

Distantia Satellitum à centro Jovis.

<i>Ex Observationibus</i>	1.	2	3	4	
Cassini	5.	8.	13.	23.	} Semidiam. Jovis.
Borelli	5 $\frac{2}{3}$.	8 $\frac{2}{3}$.	14.	24 $\frac{2}{3}$.	
Townlei per Micromet.	5,51.	8,78.	13,47.	24,72.	
Flamstedii per Microm.	5,31.	8,85.	13,98.	24,23.	
Flamst. per Eclips. Satel.	5,578.	8,876.	14,159.	24,903.	
<i>Ex temporibus periodicis.</i>	5,578.	8,878.	14,168.	24,968.	

Hypoth. VI. Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

Hypoth. VII. Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediocrium distantiarum à Sole.

Hæc à Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eademq; orbium dimensiones, sive Planetæ circa Terram, sive iidem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium Keplerus & Buhaldus omnium diligentissimè ex Observationibus determinaverunt: & distantia mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non

differunt sensibilibus à distantis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediae; uti in Tabula sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Distantiae mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♂	♂
Secundum Keplerum	951000.	519650.	152350.	100070.	72407.	38806.
Secundum Bullialdum	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De distantis Mercurii & Veneris à Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

Hypoth. VIII. Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem describere.

Pater ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias Physicis in hisce Hypothesibus negligo.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planeta circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejusdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planeta primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejusdem Libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. I. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apfidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere terram, & esse reciproce ut quadratum distantie locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogei. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim, per Corol. I. Prop. XLV. Lib. I. quod si distantia Lunæ à centro Terræ dicatur

tux

tur D , vis à qua motus talis oriatur, sit reciproce ut $D \propto \frac{1}{r^2}$, id est reciproce ut ea ipsius D dignitas, cujus index est 2 , hoc est in ratione distantiae paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ vicibus 60^2 propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem accessus meritò contemnendus est. Oritur verò ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Restat igitur ut vis illa, quæ ad Terram spectat, sit reciproce ut D^2 ; id quod etiam plenius constabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à centro Terræ est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59, secundum Vendelinum 60, secundum Copernicum $60\frac{1}{2}$, secundum Kircherrum $62\frac{1}{2}$, & secundum Tychonem $56\frac{1}{2}$. At Tycho, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 61 semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti à Gallis mensurantibus nuper definitum est: & si Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatium minuti primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{2}$. Colligitur hoc

hoc ex calculo, vel per Propositionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata distantia ratione inversâ, adeoque ad superficiem Terræ major sit vicibus 60×60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus nostris cadendo describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15 \frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15 \frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses $15 \frac{1}{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30 \frac{1}{2}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60 \frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo

cedendo à Jove & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in reſſu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium ceterosque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus, eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis eſt in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua ſit, Saturnus viciffim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites ſuos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitationem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris per exigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervaverunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpēdebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt

est ut pondus ad pondus. Et sit in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove distantis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantis dimissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ suæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta d ad e : distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa d ad e , distantia

centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm distantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur si in æqualibus à Sole distantis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuscvis in Solem major esset vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{1000}$, distantia totius, id est parte quinta distantia Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitæ ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem, vel nulla sunt, vel earum massis accurate proportionalia.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia: omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Nam si æther
aut

aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur vel pro quantitate materiae suae minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiae, posset idem per mutationem formae gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quae pro quantitate materiae quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum necessariò datur. Nam si spatia omnia plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiae, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt.

Corol. 4. Gravitationem diversi generis esse à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Estque vis magnetica longe major pro quantitate materiae quam vis gravitatis: sed & in eodem corpore intendi potest & remitti; in recessu verò à magnete decrescit in ratione distantiae plusquam duplicata; propterea quod vis longe fortior sit in contactu, quam cum attrahentia vel minimum separantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitationem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiae in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitationem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiae locorum à centro Planetæ. Et inde consequens

est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiae in iisdem.

Porro cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuò, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiae locorum à particulis. Patet per *Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.*

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centrīs æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiae inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes, & esse in partes singulas reciprocè
pro-

proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus composita, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio illa in majoribus distantis satis obtineret, at prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipsius Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodiconum inversè; & pondera ad superficies Planetarum aliasve quasvis à centro distantias majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum $224\frac{2}{3}$, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum $16\frac{3}{4}$, Satellitis Hugeniæ circa Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circa Terram 27 dier. 7 hor. 43 min. collatis cum distantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole distantia juxta observationes *Flamstedii*) est 8'. 13"; cum elongatione maxima Heliocentrica Satellitis Saturnii 3'. 20"; & cum distantia Lunæ à Terra, ex Hypothesi quod Solis parallaxis horizontalis seu semidiameter Terræ è Sole visæ sit quasi 20"; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1130}$, $\frac{1}{2260}$ & $\frac{1}{28700}$ respectivè. Est autem Solis semidiameter mediocris apparens quali 16'. 6". Illam Jovis è Sole visam *Flamstedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipses Satellitum inventa, determinavit esse ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad $24\frac{2}{3}$ adeoque cum elongatio illa sit 8'. 13" semidiameter Jovis è Sole visi erit 19" $\frac{3}{4}$. Diameter Saturni est

est ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole visi (mensurante *Flamstedio*) 50", adeoque semidiameter Saturni è Sole visi 11". Malim dicere 10" vel 9", propterea quod globus Saturni per lucis inaequalem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter distantium sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1063}$, $\frac{1}{889}$ respective, & auctis vel diminutis distantis diminuantur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in distantis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus versantium, ut 10000, 804½, 536 & 805½ respective. Pondera corporum in superficie Lunæ ferè duplo minora esse quam pondera corporum in superficie Terræ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in superficiebus Terræ & Planetarum, sunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. De Terræ quidem diametro è Sole visa nondum constat. Hanc assumpsi 40", propterea quod observationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem esse permittunt; cum *Horroxii* & *Flamstedii* observationes paulo minorem adstruere videntur. Et malui in excessu peccare. Quod si fortè diameter illa & gravitas in superficie Terræ mediocris sit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum superficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole visorum diametri sunt 18", 39"½, 8", 28", 20" circiter, erit diameter Terræ quasi 24", adeoque Parallaxis Solis quasi 12", ut *Horroxius* & *Flamstedius* propemodum statuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates illæ sunt ut Planetarum Vires in distantis à se æqualibus; id est in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1,

$\frac{1}{11263}$, $\frac{1}{31563}$, $\frac{1}{28703}$ respectivè. Si Parallaxis Solis statuatur minor quàm $20''$, debet quantitas materiae in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphaeras homogeneas in superficiebus Sphaerarum, sunt ut Sphaerarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphaerarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eosdem ut 10000, 536, 804½ & 805½, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pender à Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se fere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, fere sunt ut distantiarum reciproca $\frac{1}{9523}$, $\frac{1}{5200}$, $\frac{1}{1000}$ & $\frac{1}{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium $18''$, $39''\frac{1}{2}$, $40''$, & $11''$. Diximus utique, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole visarum; & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque densitates fere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantiae Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversis distantis à Sole, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: & Thermometro:

mometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cælis diutissimè conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{32000}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcumque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcumque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdata. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem

regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculae Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum peribat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiae totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret; praeterea cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quam aqua, hic spatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistantia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quae vicibus 13 $\frac{1}{2}$ levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in coelos ubi pondus Medii, in quo Planetae moventur, diminuitur in immensum, resistantia prope cessabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitatis Terrae Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

*Solem motu perpetuo agitari sed nunquam longe recedere à communi
gravitatis centro Planetarum omnium.*

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in superficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recederet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeant. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum Solis quam minimè discedit, & à quo idem adhuc minus discederet, si modò Sol densior esset & major, ut minus moveretur.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetae moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Solis; si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areas describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Aëctiones autem Planetarum in se mutuò perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsis circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Aëtio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunçãoe Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16 x 1100 seu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere potest constituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est vix superat minutos duos primos. In conjunçãoe autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{1681 \times 1100}{9}$ seu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 seu 1 ad 1867.

Huic autem differentiae proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Atamen à Planetarum revolvendum & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium transversas diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione sesquialtera temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolvantis ad primam duarum mediæ proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

Prop.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro situ umbilici illius deviet hinc inde à Terra. Hæc est libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circula-rem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus observationibus *Cassini* & *Flamstedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra

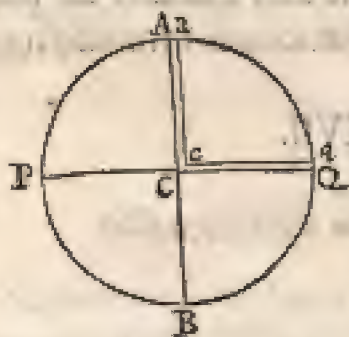
pau-

paulò altior effet sub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos
subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Ad hujus Problematis solutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiscitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ sub æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis ut 1 ad 290⁴. Unde si $APBQ$ figuram Terræ designet revolutione Ellipseos circa axem minorem PQ genitam; sitque ACQ qca canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc , & inde ad æquatorem Aa pergens: debet pondus aquæ in canalis crure ACc a esse ad pondus aquæ in crure altero QCc q ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta par-



vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure sustinebit partes reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in

Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut $126\frac{2}{3}$ ad $125\frac{2}{3}$. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut $125\frac{2}{3}$ ad $126\frac{2}{3}$. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-

Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AP , PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A , in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad 125 $\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101: Coniungantur jam hæc tres rationes, 126 $\frac{1}{2}$ ad 125 $\frac{1}{2}$, 125 $\frac{1}{2}$ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut 126 x 126 x 100 ad 125 x 125 $\frac{1}{2}$ x 101, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularium in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centripeta quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{290}$, & propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ superet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{290}$ faciet ut excessus altitudinis in crure $ACca$ sit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{5}{290}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem
ad.

ad ipsius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum mensuram, sit pedum Parisiensium 19615800 seu milliarium 3923 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, excessu pedum 85200 seu milliarium 17.

Si Planeta vel major sit vel densior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23, 56', Jupiter autem horis 9, 56', sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{2025}{50000}$ ad 1, seu 1 ad $39\frac{1}{3}$. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ipsius diametrum inter polos ut $40\frac{2}{3}$ ad $39\frac{1}{3}$ quam proximè. Hæc ita se habent ex Hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ ACQqca aequalia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera aequalium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est reciprocè ut 692 ad 689. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalibus cruribus similiter sitorum corporum. Horum pon-

pondera sunt reciproce ut crura, id est reciproce ut distantie corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistent; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantie eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantie locorum à centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportionem.

Unde tale conficit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut Sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetie Parisiorum* est 48 gr. 45': Ea Insulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 gr. 15': ea *Cayennæ* ad lictus *Guaianæ* quasi 5 gr. ea locorum sub Polo 90 gr. Duplorum 97½ gr. 28½ gr. 10 gr. & 180 gr. Sinus versi sunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo sit ad gravitatem sub Æquatore ut 692 ad 689, & excessus ille gravitatis sub Polo ad gravitatem sub Æquatore ut 3 ad 689; erit excessus gravitatis *Lutetie*, in *Insula Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem sub æquatore ut $\frac{511205}{21000}$, $\frac{147212}{21000}$ & $\frac{27753}{21000}$ ad 689, seu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456 & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & *Lutetie Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & 7 partium digiti; longitudines Pendulorum in *Insulâ Goree*, in illâ *Cayennæ* & sub Æquatore, minutis singulis secundis oscillantium superabuntur à longitudine Penduli Parisiensis excessibus $\frac{81}{10000}$, $\frac{80}{7000}$ & $\frac{92}{10000}$ partium digiti. Hæc omnia ita se habebunt, ex Hypothesi quod Terra ex uniformi materia constet. Nam si materia ad centrum paulò densior sit quam ad superficiem, excessus illi erunt paulò majores; propterea quod, si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam erit

reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantiae à materia illa quam proximè. Gravitās igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis oscillantium longitudo *Parisiis* major sit quàm in *Insula Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores sunt hæ differentiae quàm differentiae $\frac{11}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$ quæ per computationem superiorem prodire: & propterea (si crassis hisce Observationibus satis confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hisce Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accuratè tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versæ latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Mensura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum; ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter crescat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad ineundum tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvì debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæc sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hæcenus lege ad Re-

gulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuantur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prosthaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

*Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus
Lunaribus derivare.*

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extremi Jovialis est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 9 gr. 34'. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat.

Æqua-

Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ ut sunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non superat $6''.22'''$. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum summè regulares reperiantur, utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut asserant tardissimè retrogradum. Nam *Flamstedius* collatis suis cum *Cassini* Observationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsu Luminarium ad Meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernuntur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium

Con:

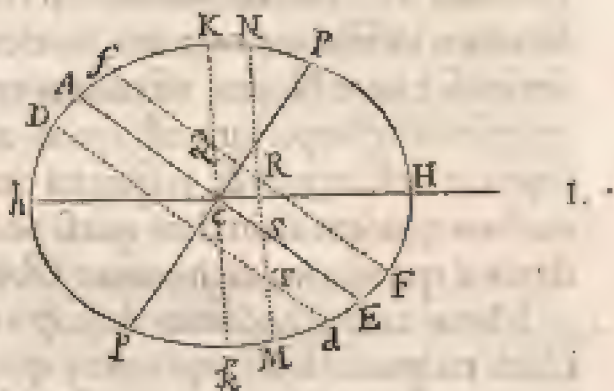
Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimat, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Oëstantes Lunæ; & paribus interval-
lis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad *expletus* venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiiis à Terra. In minoribus enim distantiiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensiōe & remissionē, adeoque nullam motus reciprocationem ciet. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versùs effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebut æstus
in

in Syzygiis Solstitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experienciâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet $ApEP$ Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; Pp , polos; AE Æquatorem; F locum quemvis extra Æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subiectum; h locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, CH, Ch Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & CK, Ck altitudines minimas: & si axibus Hh, Kk describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem Hh de-



scribatur Sphærois $HPKhp k$; designabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines Maris in locis F, f, D, d . Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM , secantem parallelos Ff, Dd in locis quibusvis R, T , & æquatorem AE in S ; erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T , sitis in hoc circulo. Hinc in revo-

revolutione diurna loci cuiusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemispharicos, unum in Hemisphærio *K H k C* ad Boream vergentem, alterum in Hemisphærio opposito *K h k C*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Phymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Observantibus *Colepressio* & *Sturmis*.

Motus autem hæcenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæc motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post Syzygias majores reddit, eosque proximè post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Phymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; atque æstus omnium maximi in iisdem portibus non sint primi à Syzygiis sed tertii. Retardan-
tur

tur etiam motus omnes in transitu per vada, adeò ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia, quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tanquini* ad *Batsham*, sub latitudine Boreali 20 gr. 50 min. *Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Lunæ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portibus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad

E e e

diem

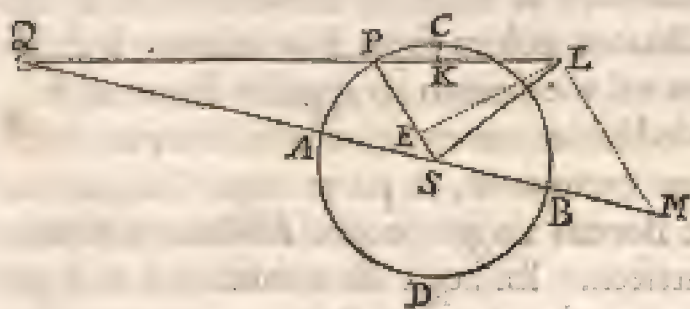
diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrefeit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenfi* inter Continentem & Insulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & spatio horarum sex à Mari *Sinenfi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant huiusmodi motus; sine alia Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Designet Q Solem, S Terram, P Lunam, $PADB$ orbem Lunæ. In QP capiatur QK æqualis QS ; sitque QL ad QK



in duplicata ratione QK ad QP , & ipsi PS agatur parallela LM ; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam QS vel QK , erit QL gravitas ac-

celeratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus QM , LM , quarum LM & ipsius QM pars SM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est.

Qua-

Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas SM & ML designare. Vis ML (in mediocri sua quantitate) est ad vim gravitatis, qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PS revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{8}{11}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam PS semidiametrorum terrestrium 60 $\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60 $\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 x 60. Ideoque vis mediocri ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 x 60 $\frac{1}{2}$ ad 60 x 60 x 60 x 178 $\frac{8}{11}$ seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportionem linearum SM , ML , datur etiam vis SM : & hæc sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementam areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.

Diximus arcam, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempore proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam ponamus etiam lineas QP , QS sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad mediocrem

summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lu-
 nam, atque adeò etiam ut velocitas hac summâ genita, id est, ut
 acceleratio descriptionis areæ $CS P$, seu incrementum momenti. Vis
 qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam SP , tempore
 suo periodico $CADBC$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset,
 efficeret ut corpus, tempore CS cadendo, describeret longitudinem
 $\frac{1}{2} CS$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Lu-
 na in orbe suo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I.
 Cum autem perpendiculum Kd in SP demissum sit ipsius EL
 pars tertia, & ipsius SP seu ML in octantibus pars dimidia, vis
 EL in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim ML in ratione
 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico
 circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3}$ x 17872 $\frac{1}{2}$ seu
 11915, & tempore CS velocitatem generare deberet quæ esset pars
 $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majo-
 rem generaret in ratione CA ad CS seu SP . Exponatur vis maxi-
 ma EL in Octantibus per aream FK x Kk rectangulo $\frac{1}{2} SP$ x Pp
 æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP genera-
 re posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tem-
 pore generat ut rectangulum $\frac{1}{2} SP$ x CP ad aream $KCGF$: tempore
 autem toto CPA , velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum
 $\frac{1}{2} SP$ x CA & triangulum SCG , sive ut arcus quadrantælis CA ad
 radium SP . Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas po-
 sterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic
 Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, adda-
 tur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum me-
 diocre exponatur per numerum 11915 summa 11915 + 50 seu
 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A , ac
 differentia 11915 - 50 seu 11865 ejuldem momentum minimum
 in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis &
 Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad
 momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad mo-
 mentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum
 SCG

SCG (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii SP , id est ut Pd ad SP) & summa exhibebit momentum areae, ubi Luna est in loco quovis intermedio P .

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11923}$. Ideoque momentum areae in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973 + Pd , existente videlicet SP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè ut summa numeri 219 $\frac{46}{100}$ & Sinus versi duplicatae distantiae Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiae Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea distantia Lunæ à Terrâ est in ratione compositâ ex dimidiatâ ratione Areae directè & dimidiatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia à Terra. Tentent Astronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Corol.

vel SK & Lunam trahit in Terram, erit 1000; & vis mediocris SM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in Quadraturis C & D ut CS , ad AS & momentum areae quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areae in Quadraturis conjunctim; id est ut $11073CS$ ad $10973AS$. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem Curvaturam in Quadraturis ut $120407 \times 178725 AS q. \times CS q. \times N - 120407 \times 2000 AS qq. \times CS$ ad $122611 \times 178725 AS q. \times CS q. \times N + 122611 \times 1000 CS qq. \times AS$, id est ut $2131969 AS \times CS \times N - 24081 AS cub.$ ad $2191371 AS \times CS \times N + 12261 CS cub.$

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro S Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam consideramus, describi debet in plano quod motu omni angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa , cujus puncta singula p inveniuntur capiendò punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ representer, & ducendo Sp æqualem SP , ea lege ut angulus PSp æqualis sit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CSp sit ad angulum CSA ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29 d. 12. h. 44'$, ad $27 d. 7 h. 43'$. Capiatur igitur angulus CSa in eadem ratione ad angulum rectum CSA , & sit longitudo Sa æqualis longitudini SA ; & erit a Apfis ima & C Apfis summa orbis hujus Cpa . Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a , & curvaturam circuli centro S intervallo SA descripti, sit ad differentiam inter

curva-

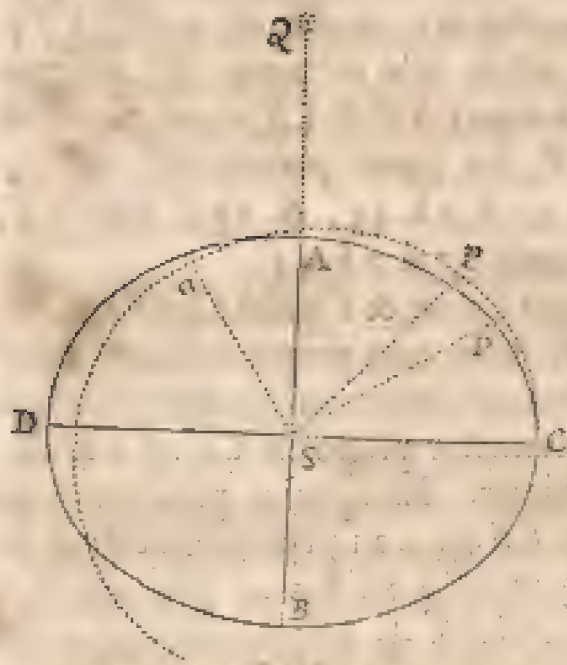
curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli $CS P$ ad angulum $CS p$; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione SA ad SC ; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro S intervallo SC descripti ut SC ad SA ; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C in duplicata ratione SA ad SC ; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ Spa in vertice C & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli $CS P$ ad angulum $CS p$. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. Collatis autem his rationibus inter se, prodit curvatura figuræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C , ut $AS \text{ cub. } + \frac{16824}{100000} CS q.$ x AS ad $CS \text{ cub. } + \frac{16824}{100000} AS q.$ x CS . Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum $CS P$ & $CS p$ applicatam ad Quadratum anguli minoris $CS P$, seu (quod perinde est) differentiam Quadratorum temporum $27 d. 7 b. 43'$, & $29 d. 12 b. 44'$, applicatam ad Quadratum temporis $27 d. 7 b. 43'$.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportionem curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CS ad AS , duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad AS x CS applicati, fiunt $2062,79 CS qq. - 2151969 N$ x $CS \text{ cub. } + 368682 N$ x AS x $CS q. + 36342 AS q.$ x $CS q. - 362046 N$ x $AS q.$ x $CS + 2191371 N$ x $AS \text{ cub. } + 4051,4 AS qq. = 0$. Hic pro terminorum AS & CS semisummâ N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo x , fit $CS = 1 + x$, & $AS = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis $0,0072036$, & inde semidiameter CS fit $1,0072$, & semidiameter AS $0,9928$, qui numeri sunt ut $69''$ & $68''$ quam proximè. Est igitur distantia Lunæ à Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet excentricitatis consideratione) ut $68''$ ad $69''$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70 .

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipti $DBCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio SP ad Terram ducto describeret aream $CS P$ tempori proportionalem;



esset autem Ellipseos semidiameter maxima CS ad semidiameter minimam SA ut $69^{\frac{10}{11}}$ ad $68^{\frac{10}{11}}$: foret Tangens anguli $CS P$ ad Tangentem anguli motus medii à quadratura C computati, ut Ellipseos semidiameter SA ad ejusdem semidiameterum SC seu $68^{\frac{10}{11}}$ ad $69^{\frac{10}{11}}$. Debet autem descriptio areæ $CS P$, in progressu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973 , utq; ex-

cessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli $CS P$. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli $CS P$ diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073 , id est in ratione numeri $68^{\frac{10}{11}}$ ad numerum $68^{\frac{10}{11}}$. Quo pacto tangens anguli $CS P$ jam erit ad tangentem motus medii ut $68^{\frac{10}{11}}$ ad $69^{\frac{10}{11}}$, & angulus $CS P$

in

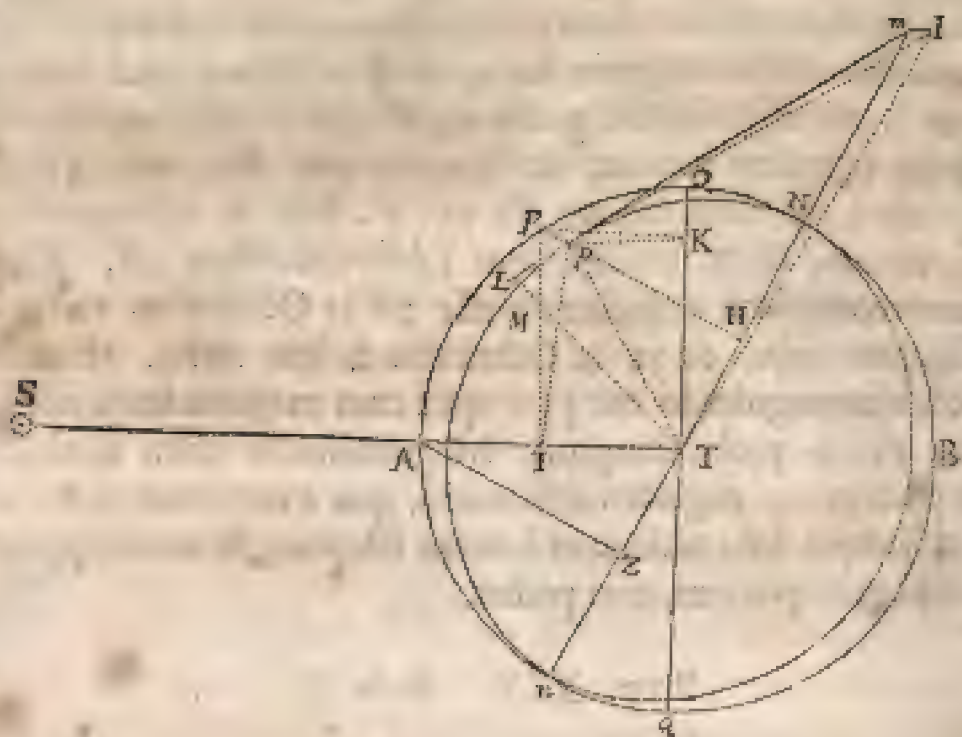
in Octantibus, ubi motus medius est 45° , invenietur $44^{\circ} 27' . 29''$: qui subductus de angulo motus medii 45° , relinquit Variationem $32' . 31''$. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum CSA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quò Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum CSa angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodice ad revolutionem periodicam, id est in ratione $29 d. 12 h. 44'$ ad $27 d. 7 h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum S dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ secus esset $32' . 31''$, jam aucta in eadem ratione, fit $35' . 9''$. Hæc ab Astronomis constituitur $40'$, & ex recentioribus Observationibus $38'$. *Halleus* autem recentissimè deprehendit esse $38'$ in Octantibus versus oppositionem Solis, & $32'$ in Octantibus Solem versus. Unde mediocris ejus magnitudo erit $35'$: quæ cum magnitudine à nobis inventa $35' . 9''$ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcata & novam, quam in Gibbosam & plenam, oriri possint.

Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Designet S Solem, T Terram, P Lunam, NPn Orbem Lunæ, Npn vestigium Orbis in plano Eclipticæ; N, n , Nodos, $nTNm$ lineam Nodorum infinite productam, PI, PK , perpendiculara demissa in lineas ST, Qq ; Pp perpendicularum demissum in planum Eclipticæ; Q, q Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ & pK perpendicularum in lineam Qq Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ $2IT$ vel $2Kp$, altera lineæ PI proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam ST trahitur.

Componitur autem vis posterior PI ex viribus IT & PT , quarum PT agit secundum planum orbis Lunaris, & propterea sicut plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem IT cum vi $2IT$ componit vim totam $3IT$, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in



circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & Notorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

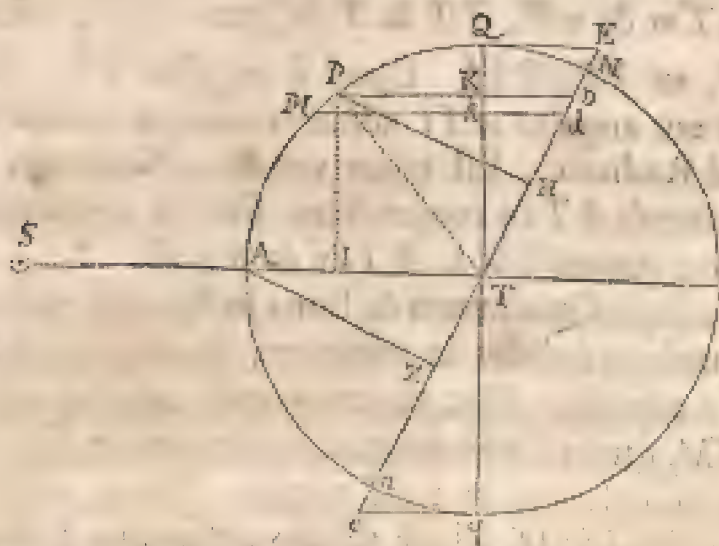
Designet jam P Marcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 IT , eodem tempore describere posset. Jungantur PL , MP , & producantur ex ad m & l , ubi secent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendicularum PH . Et quoniam ML parallela est ipsi ST , si ml parallela sit ipsi ML , erit ml in plano Eclipticæ, & contra. Ergo ml , cum sit in plano Eclipticæ, parallela erit ipsi ML , & similia erunt triangula $LM\dot{P}$, Lmp . Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n , ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda esset LP , atque adeò transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPIT$; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo mTl . Est autem ml ad mP ut ML ad MP , adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl , si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times mP}{Tm}$ id est (ob proportionales Tm & mP , TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP , ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml , seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione Sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH$ & Sinus anguli STN conjunctim, sive ut contentum sub sinibus trium angulorum TPl , PTN & STN .

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM , quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo $LP\dot{M}$, id est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris 3 IT dato illo tempore generare possit; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis

Lunæ

Lunæ à recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit $32'. 56'. 27''. 12''$, motus horarius Nodi in hoc casu erit $33''. 10''. 33''. 12''$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''. 10''. 33''. 12''$. ut contentum sub sinibus angulorum trium TPI , PTN , & STN (seu distantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debet motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam Quadraturas jungentem Qq demittantur perpendiculara PK , Mk , eademque producantur donec secent lineam Nodorum



Nn in D & d ;

erit motus ho-

rarius Nodorum

ut area $MPDd$

& quadratum

lineæ AZ con-

junctim. Sunt

enim PK , PH

& AZ prædicti

tres Sinus. Nem-

pe PK Sinus

distantiæ Lunæ

à Quadratura,

PH Sinus distantiae Lunæ à Nodo, & AZ Sinus distantiae Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Est

autem

autem PT ad PK ut PM ad Kk , adeoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH , & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ qu. id est ut area $PDdM$, & AZ qu. conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ; ideoque est ad $16''. 35''$. $16''$. $36''$. ut quadratum Sinus distantiae Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ qu. ad AT qu. Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum Qaq , summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit à Q ad M , erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n , summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit; dein Luna pergente ab n ad q , linea PD cadet extra circulum, & arcum nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de area priora, & cum equalis sit area QEN , relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT ; & summa omnium huic equalium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunariibus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33''. 10''$. $33''$. $12''$, motus mediocris horarius in hoc casu erit

Nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendiculara in axem Qq demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M , & lineæ Nodorum in D & d . Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat temporis proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area $pKkm$.

Nam si PF tangat circulum in P , & producta occurrat TN in F , & pf tangat Ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in f , conveniant autem hæ Tangentes in axe TQ ad Y ; & si ML designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum PM , urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g ; & jungantur FG & fg , quarum FG producta secet pf , pg & TQ in c , e & R respectivè, & fg producta secet TQ in r : Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in Ellipsi, ut PK ad pK , seu AT ad at ; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK , id est ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR . Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM , PGF) ut PL ad PG , hoc est (ob parallelas Lk , PK , GR) ut pl ad pe , id est (ob similia triangula plm , cpe) ut lm ad ce ; & inversè ut LM est ad lm , seu FR ad cR , ita est FG ad ce . Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY , id est ut fr ad cR , (hoc est ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT , foret fg ad FG ut fT ad FT ; propterea quod anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T , æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum PM , in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY ,
Ggg
id

id est si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verum ob similia triangula $fz p$, cep , est fg ad ce ut fp ad cp ; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$, & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est motus Nodorum in Ellipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fz seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est ut $fp \times cY$ ad $cp \times fY$, seu fp ad fY & cY ad cp ; hoc est, si $p b$ ipsi TN parallela occurrat $F\mathcal{P}$ in b , ut Fb ad FY & FY ad $F\mathcal{P}$; hoc est ut Fb ad $F\mathcal{P}$ seu Dp ad $D\mathcal{P}$, adeoque ut area $Dpmd$ ad aream $D\mathcal{P}md$. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis m , sit area $m p QEd$, quæ ad Ellipseos Tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circulum, id est ut Ta ad TA , seu $68\frac{1}{2}''$ ad $69\frac{1}{2}''$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo sit ad $16''. 35''$. $16''. 36''$. ut $AZ qu.$ ad $AT qu.$ si capiatur angulus $16''. 21''. 2''. 36''$. ad angulum $16''. 35''. 16''. 36''$. ut $68\frac{1}{2}''$ ad $69\frac{1}{2}''$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad $16''. 21''. 2''. 36''$. ut $AZ q.$ ad $AT q.$; hoc est ut quadratum Sinus distantie Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073 ; & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50 .

Unde

Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areae in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum Sinus distantiae Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum Sinus distantiae Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna percurrit PM , (cæteris paribus) ut ML , & ML est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus distantiae Lunæ à Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duabus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem

nem incunanti facile constabit. Proindeque decrementum mediocri, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream temporum in Syzygiiis describere supponebatur) erat $32^{\circ}.42^{\prime}.5^{\prime\prime}.12^{\prime}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17^{\circ}.43^{\prime}.10^{\prime\prime}$, cuius pars quarta $4^{\circ}.25^{\prime}.48^{\prime\prime}$, motui horario mediocri superius invento $16^{\circ}.21^{\prime}.2^{\prime\prime}.36^{\prime}$ subducta, relinquit $16^{\circ}.16^{\prime}.36^{\prime\prime}.48^{\prime}$ motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectentur loca bina à Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut $AZ qu.$ ad $AT qu.$ Et decrementsa motuum, à causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZ qu.$ ad $AT qu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocri horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad $16^{\circ}.16^{\prime}.36^{\prime\prime}.48^{\prime}$ ut $AZ qu.$ ad $AT qu.$; id est ut quadratum Sinus distantiae Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum versari in N , & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad Stellæ Fixas. Interea verò Solem S , per motum Terræ, progredi à Nodo, & cursum annum apparentem uniformiter complere. Sic autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad Solem semper ducta, inter-

in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut $AZq.$ ad $ATq.$ erit motus Solis ad motum Nodi in N , ut $360 ATq.$ ad $39,6349 AZq.$; id est ut $9,0829032 ATq.$ ad $AZq.$ Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa , tempus quo Sol percurrat particulam Aa , si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut $9,0829032 ATq.$ ad $9,0829032 ATq. + AZq.$ Nam tempus est reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA , exponatur per Sectorum NTA , & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa , exponatur per Sectoris particulam ATa ; & (perpendicularo aY in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ , ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in ZY ad Sectoris particulam ATa ut $AZq.$ ad $9,0829032 ATq. + AZq.$ id est ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut $ATq.$ ad $9,0829032 ATq. + AZq.$; rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NTA supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ , quæ sit ad longitudinem AZ ut $AZq.$ ad $9,0829032 ATq. + AZq.$ Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFu$, area tota NeZ , quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua Nde respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus

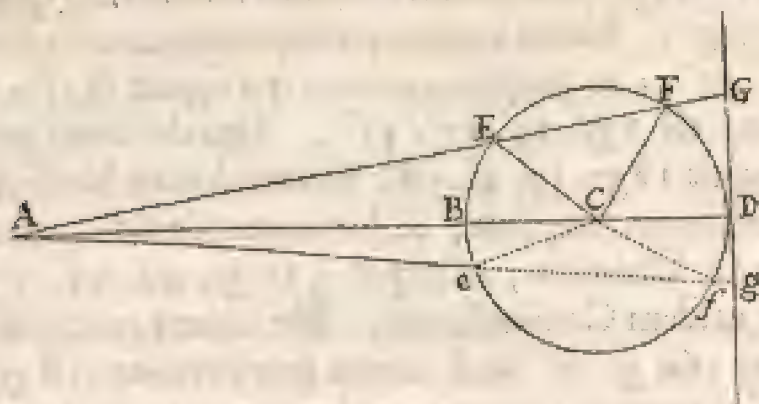
totus NA , per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò si circuli radius AT ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796; & area figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsitâ, prodibit 0,1188478. Motus autem qui responderet circulo toti erat 19 gr. 49'. 2". 49¹/₂"; & propterea motus, qui figuræ $NeFnT$ duplicatæ responderet, est 1 gr. 29'. 57". 51¹/₂". Qui de motu priore subductus relinquit 18 gr. 19'. 4". 58". motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 gr. 40'. 55'. 2". motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annum 360 gr. ut Nodi motus jam inventus 18 gr. 19'. 4". 58". ad ipsius motum annum, qui propterea erit 19 gr. 18'. 0". 22". Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est 19 gr. 20'. 31'. 1". Differentia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (in Fig. præced.) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C , intervallo quovis CD , describatur circulus $BEFD$. Producat DC ad A , ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis: (id est ut 19 gr. 18'. 0". 22". ad 19 gr. 49'. 2". 49¹/₂", atque adeo BC ad AC ut motuum differentia 0 gr. 31'. 2". 27¹/₂", ad motum superiorem 19 gr. 49'. 2". 49¹/₂", hoc est, ut 1.
ad:

ad $38\frac{1}{2}$) dein per punctum D ducatur infinita Gg , quæ tangat circulum in D ; & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis semissi



distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF secans perpendicularum DG in G ; & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi

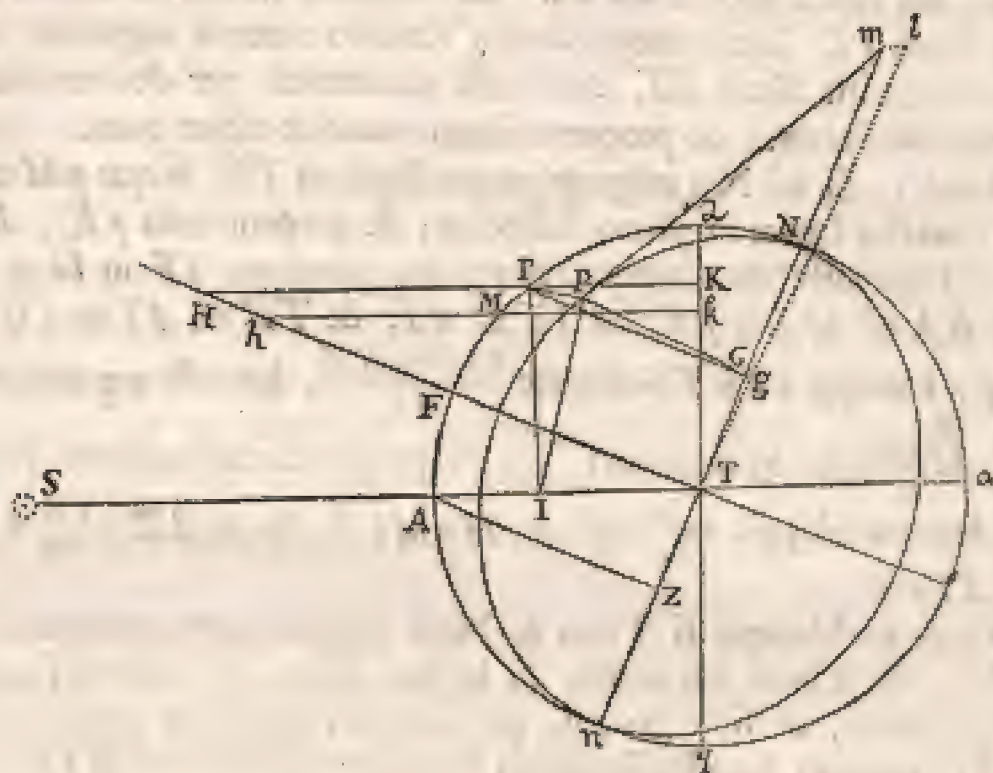
inter ipsius Syzygias (id est ad $9\text{ gr. }10'.40''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendiculari constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem mensstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.18'''.41\frac{1}{3}''$. Et quod æquatio motus Nodorum in Oëtantibus sit $1\text{ gr. }30'$. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Designent A & a Syzygias; Q & q Quadraturas; N & n Nodos; P locum Lunæ in Orbe suo; p vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & mTl motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam Tm demittatur perpendicularum PG , jungatur pG ,



& producat eam donec occurrat Tl in g , & jungatur etiam Pg : erit angulus PGp inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna versatur in P ; & angulus Pgp inclinatio ejusdem post momentum temporis completum, adeoque angulus GpG Variatio

Hhh

mo-

momentanea inclinationis. Est autem hic angulus $G P g$ ad angulum $G T g$ ut $T G$ ad $P G$ & $P p$ ad $P G$ conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus $G T g$ (per Prop. XXX.) sit ad angulum $33''. 10'''. 33''$. ut $IT \times P G \times AZ$ ad AT cub. erit angulus $G P g$ (seu inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''. 10'''. 33''$. ut $IT \times AZ \times T G \times \frac{P p}{P G}$ ad AT cub. Q. E. I.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille Ellipticus sit, motus medioeris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus IT . Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus IT , quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF , sitque $p M$ motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula $p K$, $M k$ in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & b : erit $K k$ ad $M p$ ut $p K$ seu IT ad AT , & $T Z$ ad AT ut $T G$ ad $H p$; ideoque $IT \times T G$ æquale $\frac{K k \times H p \times T Z}{M p}$, hoc est æquale areæ $H p M b$ ductæ in rationem $\frac{T Z}{M p}$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33''. 10'''. 33''$. ut $H p M b$ ducta in $A Z \times \frac{T Z}{M p} \times \frac{P p}{P G}$ ad AT cub.

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33''. 10'''. 33''$, ut aggregatum omnium arearum $H p M b$, in revolutione puncti p genetarum, & sub signis propriis + & — conjunctarum, ductum in $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$, ad $M p \times AT$ cub. id est ut circulus totus $Q A q a$ ductus in $A Z \times T Z \times \frac{P p}{P G}$ ad $M p \times AT$ cub.

cub. hoc est ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 Mp \times PT$ quad.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuatâ Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''. 10''. 33''$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 ATq$. id est (cum Pp sit ad PG ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $\frac{AZ \times TZ}{AT}$ sit ad $\frac{1}{2} AT$ ut sinus duplicati anguli ATn ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantiae Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum $33''. 10''. 33''$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT cub.$ id est ut $\frac{IT \times TG}{AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT ; hoc est ut Sinus duplicatæ distantiae Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariorum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est spatio horarum $177\frac{1}{2}$;) erit ad summam totidem angulorum $33''. 10''. 33''$. seu $5878''$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiae Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est si inclinatio sit $5 gr. 2'$, ut $7 \times \frac{876}{10000}$ ad 22 , seu 279 ad 10000 . Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariorum Variationum tempore prædicto conflata, est $164''$, seu $2'. 44''$.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Sit AD Sinus inclinationis maximæ, & AB Sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C , & centro C , intervallo BC , describatur Circulus BGD . In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$. Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiae Nodorum à Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH : erit AH Sinus inclinationis quæsitæ.

Nam $GEq.$ æquale est $GHq. + HEq. = BHD + HEq. = HBD + HEq. - BHq. = HBD + BEq. - 2BH \times BE = BEq. + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, est $GEq.$ ut AH . Designet jam AEG distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg , ob datum angulum AEG , erit ut distantia GE . Est autem Hh ad Gg ut GH ad GC , & propterea Hh est ut contentum $GH \times Gg$ seu $GH \times GE$; id est ut $\frac{GH}{GE} \times GE qu.$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit Sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic Sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonstratione supposui angulum BEG , qui distantia est Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & Gg esse augmentum horarium distantiae Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad $33''. 10''$. $33''$. ut contentum sub inclinationis Sinu AH & Sinu anguli recti BEG , qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id est ut mediocris inclinationis Sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{\circ} 8'$) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000 , sive ut 224 ad 10000 . Est autem Variatio tota, Sinuum differentiae BD respondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg ; id est ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum 2080 , quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctum; hoc est ut 7 ad 11 & 2080 ad 1 . Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''. 10''$. $33''$. ut $224 \times 7 \times 2080$ ad 110000 , id est ut 2965 ad 100 , & inde Variatio illa BD prodibit $16'. 24''$.

Hæc est inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, inclinatio major est ubi Luna versatur in Syzygiis, quàm ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'. 44''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'. 22''$ Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15'. 2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'. 46''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'. 46''$. adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit $5^{\circ} 17'. 46''$. eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5° . Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus. Nam statuunt Astronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ,

ticae, ubi Nodi sunt in Quadraturis & Luna in oppositione Solis, esse quasi 5 gr. Ubi verò Nodi sunt in Syzygiis, eandem docent esse $5\text{ gr. } 17\frac{1}{2}$ vel $5\text{ gr. } 18$.

Si jam desideretur Orbis Inclinatione illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut Sinus 5° gr. ad Sinum 5° gr. $17' 46''$; & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantie Nodorum à Quadraturis; & erit AH Sinus In-



clinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinationis, ubi Luna distat 90 gr. à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scholium.

Haecenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non consideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum, ubi in Conjunctione vel Oppositione Solis versatur, progreditur singulis diebus $23'$ respectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis est, regreditur singulis diebus $16\frac{1}{2}$ circiter: quodque ipsius motus medius annuus sit quasi 40^{gr} . Per Tabulas Astronomicas à *Cl. Flamstedio* ad Hypothesin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipsius Syzygiis progreditur cum motu diurno $24'. 28''$, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno $20'. 12''$, & motu medio annuo 40^{gr} . $41'$ fertur in consequentia. Quod differentia inter motum diurnum progressivum Apogæi in ipsius Syzygiis, & motum diurnum regressivum in ipsius Quadraturis, per Tabulas sit $4'. 16''$, per computationem verò nostram $6\frac{2}{3}$, vitio Tabularum tribuendum esse suspici-

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 seu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis & digitorum undecim. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportionem ad vim Solis, & hæc proportio colligenda ex proportionem motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avone*, ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25: Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter à Terra distantium, sunt vires *S* & *L*. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus 23½ versatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor sit, idque (quantum sentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum sinus ille sit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $\frac{841}{1000} L$, & summa virium in Syzygiis erit $L + S$, ac differentia in Quadraturis $\frac{841}{1000} L - S$, adeoque $L + S$ erit ad $\frac{841}{1000} L - S$ ut 45 ad 25 seu 9 ad 5, & inde 5 $L + 5 S$ æqualis erit $\frac{2352}{1000} L - 9 S$, &

14 S æqualis $\frac{256}{1000}$ L, & propterea L ad S ut 14000 ad 2569 seu $5\frac{2}{3}$ ad 1. In Portu *Phymuthi* æstus maris (ex observatione *Samuelis Colepreffi*) ad pedes plus minus sexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in Syzygiis Lunæ superare potest altitudinem ejus in Quadraturis pedibus septem vel octo. Si excessus mediocris his temporibus sit pedum septem cum dimidio, æstus in Syzygiis ascendet ad pedes $19\frac{3}{4}$, in Quadraturis ad pedes $12\frac{1}{4}$, & sic L + S erit ad $\frac{861}{1000}$ L — S ut $19\frac{3}{4}$ ad $12\frac{1}{4}$, & inde L ad S ut 734 ad 100 seu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Est igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5\frac{2}{3}$ ad 1, per posteriorem ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Donec aliquid certius ex Observationibus accuratius institutis constiterit, usurpabimus proportionem mediocrem $6\frac{1}{3}$ ad 1. Unde cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum ascendat, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe responderet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacífico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacífico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quàm in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africanam* & *Australem* partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esse solet. In Portibus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca

vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanic* & ejus quo *Anglia* circumdatur. Æstus in hujusmodi portibus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut $6\frac{1}{2}$ ad 1, & vires illæ sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctum; erit densitas Lunæ ad densitatem Solis ut $6\frac{1}{2}$ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id est (cum diametri mediocres apparentes Solis & Lunæ sint 31'. 27". & 32'. 12".) ut 34 ad 5. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 680 ad 387, seu 9 ad 5 quam proximè. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ sit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad $3,6\frac{1}{2}$, erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ, erit quasi duplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim seu 65 ad 9. Unde cum mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de causa figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunarum umbilicum, ob rationem superius allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.

Si $APEp$ Terram designet uniformiter densam, centroque C & polis P , p & æquatore AE delineatam; & si centro C radius CP describi intelligatur sphaera Pape; sit autem QR planum, cui recta à cen-

etiorum est ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati consulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione composita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque, ad duo quadrata ex diametro; id est in ratione materiæ ad materiam & numeri 9252751 & 1000000.

Est enim motus Cylindri circa axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III.

Si annulus, Terra omni reliqua sublata, solus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

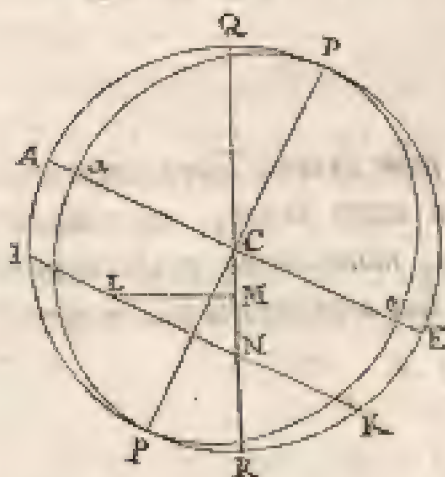
Prop.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat $16'' . 35''' . 16'' . 36'$. & hujus dimidium $8'' . 17''' . 38'' . 18'$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo $20\text{ gr. } 11' . 46''$. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20\text{ gr. } 11' . 46''$, in antecedentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20\text{ gr. } 11' . 46''$, ut dies sidereus horarum $23 . 56'$, ad tempus periodicum Lunæ dierum $27 . 7\text{ hor. } 43'$; id est ut 1436 ad 39343 . Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; siue Lunæ illæ se mutuò non contingant, siue liquecant & in annulum continuum formentur, siue denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste quoad quantitatem materiae



æqualis sit Terræ omni $PapAPePE$, quæ globo $PapE$ superior est; & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut $aCqn.$ ad $ACqn.$ — $aCqn.$ id est (cum Terræ diameter minor PC vel aC sit ad diametrum majorem AC ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 seu 1000 ad 114584 ; si annulus iste Terram secundum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hu-

hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est ut 4143 ad 439248: ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443391. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compositi, ad motum 20 gr. 11'. 46", ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id est ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 IT, in Fig. pag. 444.) sunt in singulis particulis ut distantia particularum à plano QR, & his viribus particula illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. I.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quam prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20 gr. 11'. 46". ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6". 12". 2". Hæc est præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut 6 $\frac{1}{2}$ ad 1, & hæc vis pro quantitate sua augebit etiam præcessionem Æquinoctiorum. Ideoque præcessio illa ex utraque causa oriunda jam fiet major in ratione 7 $\frac{1}{2}$ ad 1, & sic erit 45". 24". 15". Hic est motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipsam exercitis nullam in partem inclinari potest.

Designet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ prædictum, & ex uniformi materiâ constans. Et si distinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & consimiles, *APEp*, *BQbq*,
CRcr.

Gallis inventi sunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodire $\frac{692}{10000}$ & $\frac{689}{10000}$. Major est itaque longitudo Penduli *Cayenne* quàm oportet, in ratione $\frac{1}{8}$ ad $\frac{9}{10000}$, seu 1000 ad 712; & in *Insula Goree* in ratione $\frac{1}{10}$ ad $\frac{9}{10000}$, seu 1000 ad 810. Si sumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut supra dictum est) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extrinum, non ad intimum, sed ad intermedium aliquem, id est, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, sed in mediocri aliqua, puta 10 ad 8 $\frac{1}{3}$ vel 6 ad 5, evadet annuatim 54°. 29'. 6".

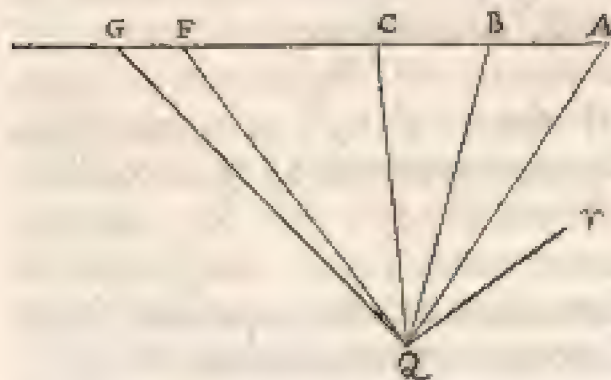
Rursus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam distantia particulæ cujusque terrestris à plano *QR*, quo tempore particula illa à plano Eclipticæ longissimè distat, in Tropico suo (ut ita dicam) consistens, diminuitur, per inclinationem planorum Eclipticæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione distantie illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur summa virium particulæ ejusdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter distantibus: uti ex prædemonstratis facile ostendi possit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa sit 23 $\frac{1}{2}$ gr. diminuendus est motus 54°. 29'. in ratione Sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23 $\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet 49°. 58'. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem nostram) 49°. 58', fere ut Phenomena cælestia requirunt. Nam regressus ille annuus ex observationibus Astronomorum est 50'.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ & Planetarum; superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

Lemma IV.

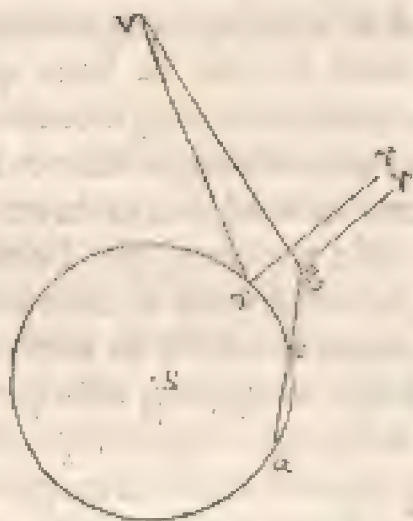
Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius moveri videntur, nunc verò celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiozem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retro-



grado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sinto τQA , τQB , τQC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque τQF longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta ABC , cujus partes AB , BC rectis QA & QB ,

QB , QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producat AC ad G , ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG . Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrediretur; foret angulus $\angle QG$ longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur $\angle FQG$, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\angle AQG$, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiolem reddit, vel forte retrogradum; uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, acT orbem magnum, a locum Terræ in observatione prima, c locum Terræ in observatione secunda, T locum Terræ in observatione ultima, & Tr lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus $\angle TV$ æqualis angulo $\angle QF$, hoc est æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in T . Jungatur ac , & producat ea ad g , ut sit ag ad ac ut AG ad AC , & erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur g \parallel ipsi Tr parallela, & capiatur angulus $\angle gV$ angulo $\angle QG$ æqualis, erit hic angulus $\angle gV$



æqualis longitudini Cometæ è loco g spectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco g in locum T : ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus V orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longè intra Jovem. Unde consequens est quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiae: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à *Cl. Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2'. 0". Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 1" vel 1 2". Luce verò & claritate capitis superabit caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedi, & diameter apparens globi sit quasi 21", adeoque lux globi & annuli con-

conjunctionem æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30": erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12" ad 30" directè, id est ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut Author est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quin etiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6', ac nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter Capillitii Cometarum raro superet 8' vel 12', diameter verò Nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cælo qui Cometæ in regionem Fixarum prope ablegant: qua certè ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hic sunt, illustrantur à Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometæ longe infra Sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus à Capite semper ortus per spacia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad

Nu-

Nucleum capitis. Igitur si imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra discum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescunt, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum à Terra Solem versus, ac decrecente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cæpit, remittebat semper de motu suo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obrectus desinit apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept. 4.* quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug. 6.* esse tantum 6'. 5" inclusâ comâ, at *Sept. 2.* esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere sep-

septimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in maiore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decem.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decem.* 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parùm, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decem.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decem.* 26. velocissimè motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maximè splenduerunt, ex altera Perigæi parte evanuerunt. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in liu prioris. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniore qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret ceteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quàm in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtegit. Nimirum

mirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniore magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphære infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliter cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Pater per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt, orbis erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione sequialtera transversorum axium. Ideoque Cometæ maxima

xima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolvantur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est ad annos 30, ut 4 $\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ absque erroribus sensibilibus adhiberi possunt.

Corol. 3. Et propterea, per *Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.* velocitas Cometæ omnis erit semper ad velocitatem Planetæ cujuscvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ distantiae Cometæ à centro Solis ad distantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum transversam, esse partium 100000000, & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675 $\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364 $\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione distantiarum respectivè, ideoque datur.

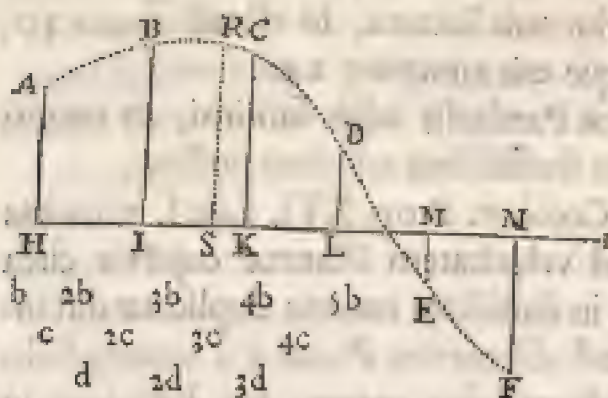
Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A, B, C, D, E, F, &c.* & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendiculara quotcunque *AH, BI, CK, DL, EM, FN.*

Cas. 1. Si punctorum *H, I, K, L, M, N* æqualia sunt intervalla *HI, IK, KL, &c.* collige perpendicularorum *AH, BI, CK &c.* differentias primas *b, 2b, 3b, 4b, 5b, &c.* secundas *c,*

2 c, 3 c, 4 c, &c. tertias d, 2 d, 3 d, &c. id est, ita ut sit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta



quacunque perpendiculari RS , quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quælitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM , &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum ME , & præponendo signa negativa terminis HS, IS , &c. qui jacent ad partes puncti S versus A , & signa affirmativa terminis SK, SL , &c. qui jacent ad alteras partes puncti S . Et signis probe observatis erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 1. Quod si punctorum H, I, K, L , &c. inæqualia sint intervalla HI, IK , &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK , &c. differentias primas per intervalla perpendicularorum divisas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; secundas per intervalla bina divisas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas $e, 2e$, &c. & sic deinceps; id est ita ut sit $b = \frac{AH-BI}{HI}$, $2b = \frac{BI-CK}{IK}$, $3b = \frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b-2b}{HI}$, $2c = \frac{2b-3b}{IL}$, $3c = \frac{3b-4b}{KM}$, &c. Postea $d = \frac{c-2c}{HL}$, $2d = \frac{2c-3c}{IM}$, &c. Invenitis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME , & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot,

quot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ huius eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex observatis aliquot locis Cometae invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

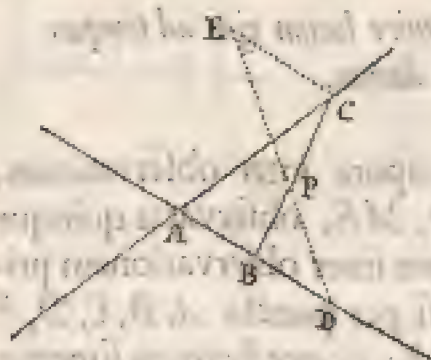
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes, (in Fig. præced.) HA, IB, KC, LD, ME , observatas quinque longitudes Cometae, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS , erit RS longitudo quæsitæ.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

Lemma VII.

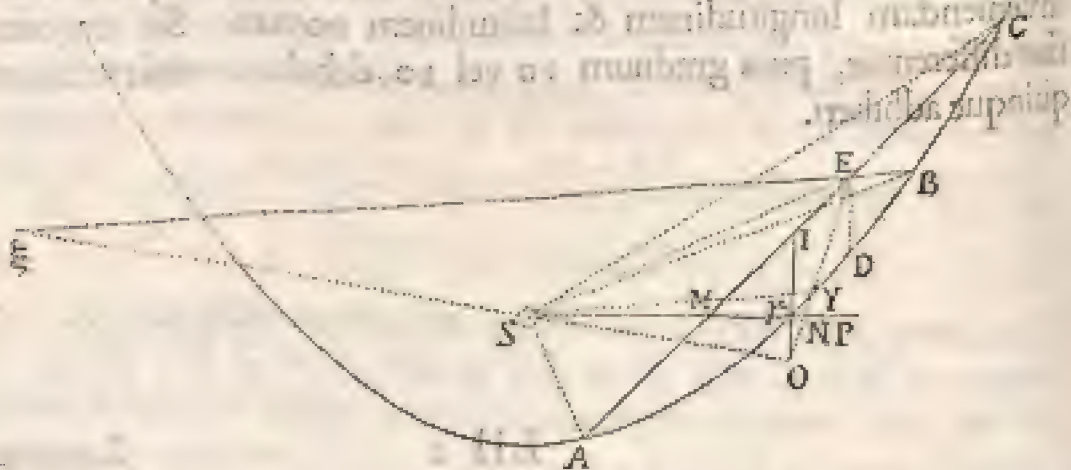
Per datum punctum P ducere rectam lineam BC , cujus partes PB , PC , rectis duabus positione datis AB , AC abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.



A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD , & producatur eadem versus rectam alteram AC usque ad E , ut sit PE ad PD in data illa ratione. Ipsi AD parallela sit EC ; & si agatur CPB , erit PC ad PB ut PE ad PD . *Q. E. F.*

Lemma VIII.

Sit ABC Parabola umbilicum habens S . Chordæ AC bisectâ in I abscindatur segmentum $ABCI$, cujus diameter sit $I\mu$ & vertex μ . In $I\mu$ productâ capiatur μO equalis dimidio ipsius $I\mu$. Jungatur OS , &



producatur ea ad ξ , ut sit $S\xi$ equalis $\simeq SO$. Et si Cometa B moveatur in arcu CBA , & agatur ξB secans AC in E ; dico quod punctum E abscindet

scindet de chorda AC segmentum AE tempori proportionale quamproximè.

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in Y , & erit area curvilinea AEY ad aream curvilineam ACY ut AE ad AC quamproximè. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEY$ ad aream totam $ASCY$ ut AE ad AC quamproximè. Cum autem EO sit ad SO ut 3 ad 1 & EO ad YO prope in eadem ratione, erit SY ipsi EB parallela quamproximè, & propterea triangulum SEB , triangulo YEB quamproximè æquale. Unde si ad aream $ASEY$ addatur triangulum EYB , & de summa auferatur triangulum SEB , manebit area $ASBY$ areæ $ASEY$ æqualis quamproximè, atque adeo ad aream $ASCY$ ut AE ad AC . Sed area $ASBY$ est ad aream $ASCY$ ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

Rectæ $I\mu$ & μM & longitudo $\frac{AI^2}{AS\mu}$ æquantur inter se. Nam $AS\mu$ est latus rectum Parabola pertinet ad verticem B .

Lemma X.

Si producat $S\mu$ ad N & P , ut μN sit pars tertia ipsius μI , & SP sit ad SN ut SN ad $S\mu$. Cometa quo tempore describit arcum $A\mu C$, si progrediretur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi SP æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ AC .

Nam si velocitate quam habet in μ , eodem tempore progredietur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ ; area quam Radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in Tangente descriptæ

Lemma novissimum) describet chordam AC , adeoque eodem tempore in circulo cujus semidiameter esset SP revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam AC in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP , cadendo de altitudine illa in Solem, describeret eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP , id est spatium $\frac{AIq.}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine SP , ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq.}{4S\mu}$ id est spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. Q. E. D.

Prop. XLI. Prob. XX.

Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulò simpliciorē exco- gitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma-lexum.

Designent S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, $TA, tB, \tau C$ observatas tres longitudes Cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac
ter.

cultram novam BE , quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiae BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{2}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem ut tempora inter observationes, V & W .

Ad AC bisectam in I erigantur perpendiculara AM , CN , IO , quarum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τa . Jungatur MN secans IO in O . Constituantur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{1}{2}i\lambda$, & agatur occulta OD . Deinde in MN versus N capiatur MP , quæ sit ad longitudinem supra inventam X in dimidiata ratione mediocris distantiae Telluris à Sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam OD . Et in AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E , A , C , G , ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e , a , c , g , & ε , α , γ . Deinde si per G , g , γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$ secans rectam τC in Z : erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in AC , ae , $\alpha\gamma$ capiantur AF , af , $\alpha\phi$ ipsi CG , cg , $\gamma\gamma$ respectivè æquales, & per puncta F , f , ϕ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$ secans rectam AT in X ; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S , per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Construccionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VIII: & BE per Lem. XI. sit pars rectæ BS in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEG interjecta; & MP (per Lem. VIII.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modò B sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

M m m

Cæ.

Ceterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum lecabit rectam tB præterpropter innotescat, in angulo illo ducenda erit recta occulta AC , quæ sit ad $\frac{1}{2}$ Tt in dimidiata ratione $S t$ ad $S Q$. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt , determinabitur punctum B quod prima vice usurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & secundum præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine MP ; in tB capiatur punctum b , ea lege, ut si TA, TC seminuò secuerint in Y , sit distantia Yb ad distantiam YB in ratione composita ex ratione MN ad MP & ratione dimidiata SB ad Sb . Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β ; si modò operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obyenerit, postquam inventa sunt puncta F, f & G, g , actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & TC in punctis quæstis X & Z .

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

		Temp. appar.	Temp. verû	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
1680 December	12	4.46	4.46.00	1.53.2	6.33.0	8.16.0
	21	6.32 $\frac{1}{2}$	6.36.19	11.8.20	15.7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14.10.49	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16.10.38	28.24.6	27.00.57
	29	7.55	8.03.2	19.10.56	14.11.49	28.10.05
	30	8.2	8.10.26	20.12.20	17.37.9	28.11.12
1681 January	5	5.51	6.1.38	26.23.19	8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7.0.53	0.29.54	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6.6.10	1.28.34	20.40.57	23.44.00
	13	6.56	7.8.55	4.34.6	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.58	9.55.48	17.56.54
	30	8.07	8.21.53	21.50.9	13.19.36	16.40.57
February	2	6.20	6.34.51	24.47.4	15.13.48	16.02.02
	5	6.50	7.4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

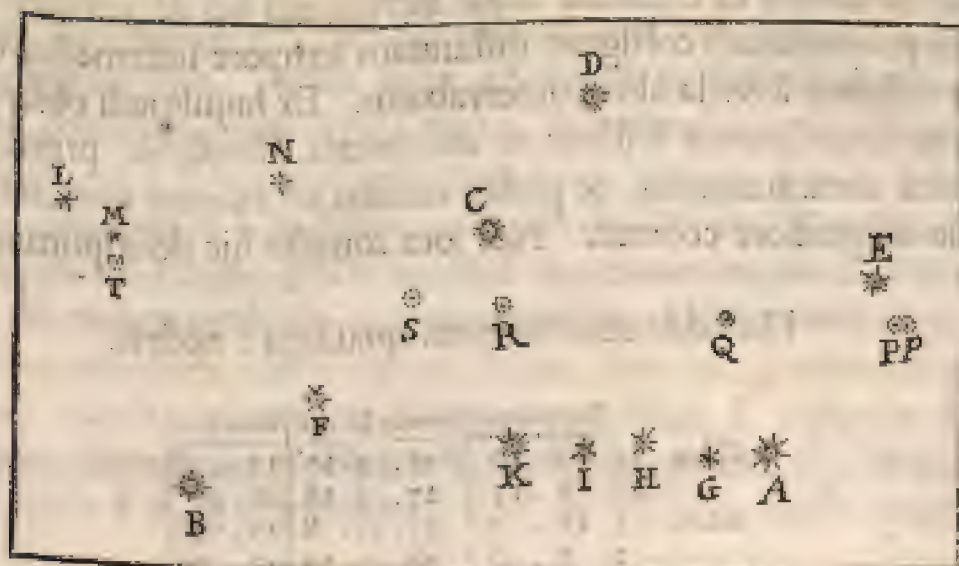
In his observationibus *Flamstedius* eâ usûs est diligentia, ut postquam bis observasset distantiam Cometæ à Stella aliqua fixa; deinde etiam distantiam bis ab alia stella fixa; rediret ad stellam priorem & distantiam Cometæ ab eadem iterum observaret, idque bis, ac deinde ex distantia illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret distantiam tempore intermedio, quando distantia à stella altera observabatur. Ex huiusmodi observationibus loca Cometæ festinanter computata *Flamstedius* primo cum amicis communicavit, & postea easdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correctâ hic descripsimus.

His adde observationes quasdam è nostris.

		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febru.	25	8 ^h . 30'	26. 19. 22"	12. 46"
	27	8 . 15	27. 4. 28	12. 36"
Mart.	1	11 . 0'	27. 53. 8	12. 24"
	2	8 . 0	28. 12. 29	12. 19"
	5	11 . 30	29. 20. 51	12. 25"
	9	8 . 30	29. 43. 2	11. 44"

Hæ observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filifque in foco Telescopii locatis paractæ sunt: quibus instrumentis & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero δ*) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero ζ*) & *C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P, Q, R, S, T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium 80⁷/₁₁, erat *AC* partium 52⁵/₁₁, *BC* 58⁵/₁₁, *AD* 57⁵/₁₁, *BD* 82⁵/₁₁, *CD* 23⁵/₁₁, *AE* 29⁵/₁₁, *CE* 57⁵/₁₁, *DE* 49⁵/₁₁, *AK* 38⁵/₁₁, *BK* 43, *CK* 31⁵/₁₁, *FK* 29, *FB* 23, *FC* 36⁵/₁₁, *AH* 18⁵/₁₁, *DH* 53⁵/₁₁, *BN* 46⁵/₁₁, *CN* 31⁵/₁₁, *BL* 45⁵/₁₁, *NL* 31⁵/₁₁. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris Feb. 25. St. vet. Hor. 8¹ P. M. Cometæ in p existentis distantia à stella E erat major quàm $\frac{2}{3} AE$, minor quàm AE , adeoque æqualis $\frac{3}{4} AE$ proximè; & angulus ApE nonnihil



obtusius erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad pE perpendiculum ab A , distantia Cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{3} pE$.

Eadem nocte, horâ 9¹₂, Cometæ in P existentis distantia à stella E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}} AE$, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}} AE$, adeoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}} AE$, seu $\frac{8}{19} AE$ quamproximè. A perpendiculo autem à Stella A ad rectam PE demisso distantia Cometæ erat $\frac{4}{5} PE$.

Die 8^{ta}, Mart. 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm $\frac{1}{3} CK$, & paulo minor quàm $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{8} CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{16} CR$ seu $\frac{19}{48} CK$.

Die 9^{ta}, Mart. 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S , distantia à stella C erat $\frac{4}{9} FC$ quamproximè. Distantia stellæ F à recta CS producta erat $\frac{1}{25} FC$; & distantia stellæ B ab eadem recta erat quintuplo major quàm distantia stellæ F . Item recta NS producta tran-

transibat inter stellas H & I , quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quàm stellæ I .

Die 5ⁿⁱ, Mart. 5. hor. 11 $\frac{1}{2}$. P. M. Cometa existente in T , recta MT æqualis erat $\frac{1}{2} ML$, & recta LT producta transibat inter B & F , quadruplo vel quintuplo propior F quàm B , auferens à BF quintam vel sextam ejus partem versus F . Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B , quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F . Erat M stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum A & B distantia esset 2 gr. 6 $\frac{1}{2}$, & stellæ A longitudo \approx 26 gr. 41'. 48", & latitudo borealis 12 gr. 8 $\frac{1}{2}$, stellæque B longitudo \approx 28 gr. 40'. 16". & latitudo borealis 11 gr. 17 $\frac{1}{2}$; quemadmodum à *Flamstedio* observatas accepi) derivabam longitudes & latitudes Cometæ. Micrometro parum affabre constructâ usus sum, sed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quateñus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultimâ Mart. 9. ubi positiones fixarum ad stellas A & B minus accuratè determinare potui. *Cassinus* qui Cometam eodem tempore observavit, se declinationem ejus tanquam invariata manentem parum diligenter definivisse falsus est. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter desletere cepit boream versus, à parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hætenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit Dec. 21, Jan. 5, & Jan. 25. Ex his inveni St partium 9842, & Vt partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda = 413$; BE secunda vice 421, OD 10186, X 8528, MP 8450, MN 8475, $NP = 25$. Unde ad operationem secundam collegi distantiam tb 5640. Et
per.

per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 & τ 211322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in α & γ 1 gr. 53'; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 gr. 20'; verticem ejus (seu perihelium Cometæ) in m 27 gr. 43' cum latitudine australi 7 gr. 34'; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585; Cometam verò Decemb. 8 d. o h. 4. P. M. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphice; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16ⁱ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

COMETÆ

	Dist. Co- meta à Sole	Lon. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ.	
						Long.	Lat.
Decemb. 12	2792	γ 6.32	8.18 $\frac{1}{2}$	γ 6.33	8.26	- 2	- 7 $\frac{1}{2}$
29	8403	χ 13.13	28. 0	χ 13.11	28.10. $\frac{1}{2}$	+ 2	- 10 $\frac{1}{2}$
Febr. 5	16669	δ 17. 0	15.29 $\frac{1}{2}$	δ 16.59 $\frac{1}{2}$	15.27 $\frac{1}{2}$	0	+ 2 $\frac{1}{2}$
Mar. 5	21737	ϵ 29.19	12. 4	ϵ 29.20	12. 2 $\frac{1}{2}$	- 1	+ 1 $\frac{1}{2}$

Præterea cum Cl. *Flamstedius* Cometam, qui Mense *Novembri* apparuerat, eundem esse cum Cometa mensium subsequens, literis ad me datis aliquando disputaret, & Trajectoriam quandam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, visum est loca Cometæ in hoc orbe Mense *Novembri* computare, & cum Observationibus conferre. Observationes ita se habent.

Nov. 17. St. *Vet. Pontanus* & alii hora sexta matutina *Rome*, (id est hora 5. 10' *Londini*) Cometam observant in α 8 gr. 30' cum latitudine Australi 0 gr. 40'. Extant autem eorum observationes in tractatu quem *Pontanus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Rome*, Cometam vidit in α 8 gr. sine Latitudine.

Nov.

Nov. 18. *Ponthæus* & *Socii* horâ matutinâ 6, 30' *Romæ* (i. e. hor. 5. 40' *Londini*) Cometam viderunt in $\approx 13'$, cum Lat. Austr. 1 gr. 20'. Eodem die *R. P. Ango* in *Academia Flebensi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media est trium in recta linea in Virginis Australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ≈ 12 gr. 46' cum Lat. Austr. 50'. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova Angliâ* in Lat. 42 $\frac{1}{2}$, horâ quintâ matutinâ (id est *Londini* hora Mat. 9 $\frac{1}{2}$) Cometa visus est in ≈ 14 circiter, cum Lat. Austr. 1 gr. 30'; uti à *Cl. Halleio* accepit.

Nov. 19. hora Mat. 4 $\frac{1}{2}$ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat à Spica \approx quasi 2 gr. Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. Mat. *Bostoniæ* in *Nova-Angliâ* Cometa distabat à Spica \approx gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40', atque adeo differentia Long. 44' circiter. Unde Cometa erat in ≈ 18 gr. 40' cum Lat. Austr. 1 gr. 19'. Eodem die *D. Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginie* in Lat. 38 $\frac{1}{2}$ gr. horâ quintâ matutinâ (id est horâ 10' *Londini*) Cometam vidit supra Spicam \approx , & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi $\frac{3}{4}$ gr. Observator idem, eadem horâ diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 gr. inferiorem Spicâ. Congruent hæc observationes cum observationibus in *Nova Angliâ* factis, si modò distantie (pro motu diurno Cometæ) non nihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spicæ \approx altitudine 52' circiter, ac die posteriore inferior eadem stellâ altitudine perpendiculari 2 gr. 40'.

Nov. 20. *D. Montenarius* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta Matutina, *Venetis* (id est hora 5. 10' *Londini*) Cometam vidit in ≈ 23 gr. cum Lat. Austr. 1 gr. 30'. Eodem die *Bostoniæ* distabat Cometa à Spica \approx , 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ≈ 23 gr. 24 circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & *Socii* hor. mat. 7 $\frac{1}{4}$ Cometam observarunt in ≈ 27 gr. 50' cum Latitudine Australi 1 gr. 16'. *Ango* horâ quintâ.

quintâ mat. in ≈ 27 gr. 45'. *Montenarus* in ≈ 27 gr. 51'. Eodem die in Insulâ *Jamaicâ* visus est prope principium *Scorpii*, eandemque circiter latitudinem habuit cum *Spica Virginis*, id est 1 gr. 59'.

Novem. 22. Visus est à *Montenaro* in $m 2^{\circ} 33'$. *Bostoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in $m 3$ gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est à *Montenaro Novem. 24.* in $m 12$ gr. 52'. & *Nov. 25.* in $m 17$ gr. 45'. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 gr. Eandem *Ponthaus* & *Galletius* decrevisse, *Montenarus* & *Ango* semper crevisse testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed ex *Montenari*, *Angonis* & observatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10' reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproximè descripsisse.

	Long. Com.	Latit. Com.
<i>Nov. 17</i>	$\approx 8. 0$	$0. 45$ Austr.
18	12. 52	1. 2
19	17. 48	1. 18
20	22. 45	1. 32
21	27. 46	1. 44
22 ^m	2. 48	1. 55
23	7. 50	2. 4
24	12. 52	2. 12
25	17. 45	2. 18

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

	Comet. Lon.	Com. Lat.
<i>Nov. 17</i>	$\approx 8. 3$	$0. 23$ A
21	$\approx 28. 0$	$1. 22$ A
25 ^m	18. 17	2. 6 A

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequen-
tibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolica, atque adeo hanc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca ob-
servata

servata & loca computata tam ex erroribus observationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admissis, facile oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: observationibus sequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. Nov. 18. cauda 30 gr. longa, Solique directe opposita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam ϵ , qui tunc erat in π 9 gr. 54'. Nov. 19. in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. Dec. 10. cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiae inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas A, ω, b in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in π 19 $\frac{1}{2}$ cum lat. bor. 34' gr. circiter. Dec. 11. surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero*, α, β) desinens in π 26 gr. 43' cum lat. bor. 38 gr. 34'. Dec. 12. transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in π 4°, cum lat. bor. 42 $\frac{1}{2}$ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda Dec. 12. hora 5, 40' *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni Uropygium ad gr. 10. sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occalum & boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus gr. 3. juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à Stella illa 2 gr. 15' austrum versus, & terminus superior erat in π 22 gr. cum lat. bor. 61 gr. Dec. 21. surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiae earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in π 24 gr. cum lat. 47 $\frac{1}{2}$ gr. Dec. 29. tangebatur *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 gr. adeoque desinebat in π 19 gr. cum lat. 35. gr. Jan. 5. tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat

40 gr. ; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat è regione stellæ α in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 gr. 50', & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½ gr. Jan. 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7 ; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali *Aurigæ* accuratè, adeoque declinabat ab oppositione Solis Boream versus in angulo graduum decem. Denique Feb. 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem Feb. 7. se caudam ad longitudinem gr. 12. vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciprocè ut quadratum distantiae locorum à Sole. Ideoque cum distantia Cometæ à Sole Dec. 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem ; ut expertus sum : & calor ferri candentis (si rectè conjeçtor) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis ; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio versantem ex radiis

Solaribus concipere posset; quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicio tamen quod duratio Caloris ob causas latentes augeatur in minore ratione quàm ea diametri: & optatim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod Cometa Mense *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quàm antea Mense *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur, statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum; vel orti ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem esse seu vaporem à capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes à Sole averfas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum

fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissimè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescent. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vires detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi caput lux tenuis est & valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense *Decembri*, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea *Jan. 27 & 28* caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima, quæ

quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra: ut supra dictum est. Sed & *Feb. 9.* & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb. 28* hora 8½ P. M. *Londini*, versabatur in $\times 8^{\text{gr.}} 41'$ cum latitudine boreali $28^{\text{gr.}} 6'$, Sole existente in $\nu 18^{\text{gr.}} 26'$. Et Cometa Anni 1577 *Dec. 29.* versabatur in $\times 8^{\text{gr.}} 41'$ cum latitudine boreali $28^{\text{gr.}} 40'$. Sole etiam existente in $\nu 18^{\text{gr.}} 26'$ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione Solis Aquilonem versus; in posteriore verò (ex Observationibus Tychoonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut Phenomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriverentur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averfas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod Spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directè averfis; digrediente autem Spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura agre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extre-

extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulò splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujuscvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (ut jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper desent à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lactæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatii tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad summam Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes

pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius aeræ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbens, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantie locorum à centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, si ascendantur à superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longe majori, quàm spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleteret omnes Planetarum regiones ad usque sphaeram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rareseat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debet cauda esse quàm rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rareseat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento transluere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quàm aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando,

tando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat à Sole, ascendere capit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere ceperat à capite ante Decemb. 11. adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longidinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per coelos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cælestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum

alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditiſſimis in regionibus nostris, à radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritatem gravitatem suam specificam quæ prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrentur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbis curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsis pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitatis enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant à caudis. Comuni gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis aut aliis quibuscunque facillimè accipiant & postea liberrime servant.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusq; Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decendant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutrant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decedit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor spiritum illum, qui aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphære Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit)

spicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiire, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphæarum partibus infimis circumdantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ distantis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mensē enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mensē *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam *Juveni* cuidam *Cantabrigiensi* *Novem.* 19. Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mensē *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mensē *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emisserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R.P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda verò supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam faciliè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa;

tenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput à Sole reſceſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, cujus Stella erat parva & obſcura (ut ille anni 1680) ſed ſplendor qui ex ea exiit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat, ut habet Hevelius ex Simeone Dimelmeiſi Monacho. Apparuit initio Menſis Feb. circa veſperam ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. A Sole, inquit Matthæus Pariſienſis, diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia [rectius ſexta] uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens. Talis etiam erat ardentiffimus ille Cometa ab Ariſtotele deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem [caudæ ſcilicet] nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore (ait Ariſtoteles) cum [cauda] jam minus flagraret, reddita eſt [capiti] Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cæli partem [id eſt ad 60 gr.] extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometæ eſſe genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in orbibus minoribus & Soli propriis gyrantur, ſic etiam Cometæ, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe & in orbibus minoribus revolvi rationi conſentaneum videtur. Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Co-

meta-

metarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens Lumen accendere potest.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem graphicè inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maximè distantia; sitque *A* tempus inter primam & secundam, ac *B* tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis seu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus area, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunt *D* & *E*; nempe *D* area inter observationem primam & secundam, & *E* area inter secundam ac tertiam. Si:que *T* tempus totum quo area tota *D* + *E*, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20' vel 30', quæ dicantur *P*; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra): deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areae duæ inter observationes descriptæ, quæ sint *d* & *e*, nec non tempus totum *t* quo area tota *d* + *e* describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20' vel 30', quæ dicantur *Q*. Deinde ex observatis

servatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ϵ , & tempus totum τ quo area tota $\delta + \epsilon$ describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B , & G ad 1 ut D ad E , & g ad 1 ut d ad e , & γ ad 1 ut δ ad ϵ ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis $+$ & $-$ probe observatis quærantur numeri m & n , ea lege ut sit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R , r & p designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem Latera transversa respectivè: erit $R + mr - mR + np - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{L + ml - m}{L + n\lambda - n}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quàm Cometa describit. Datò autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

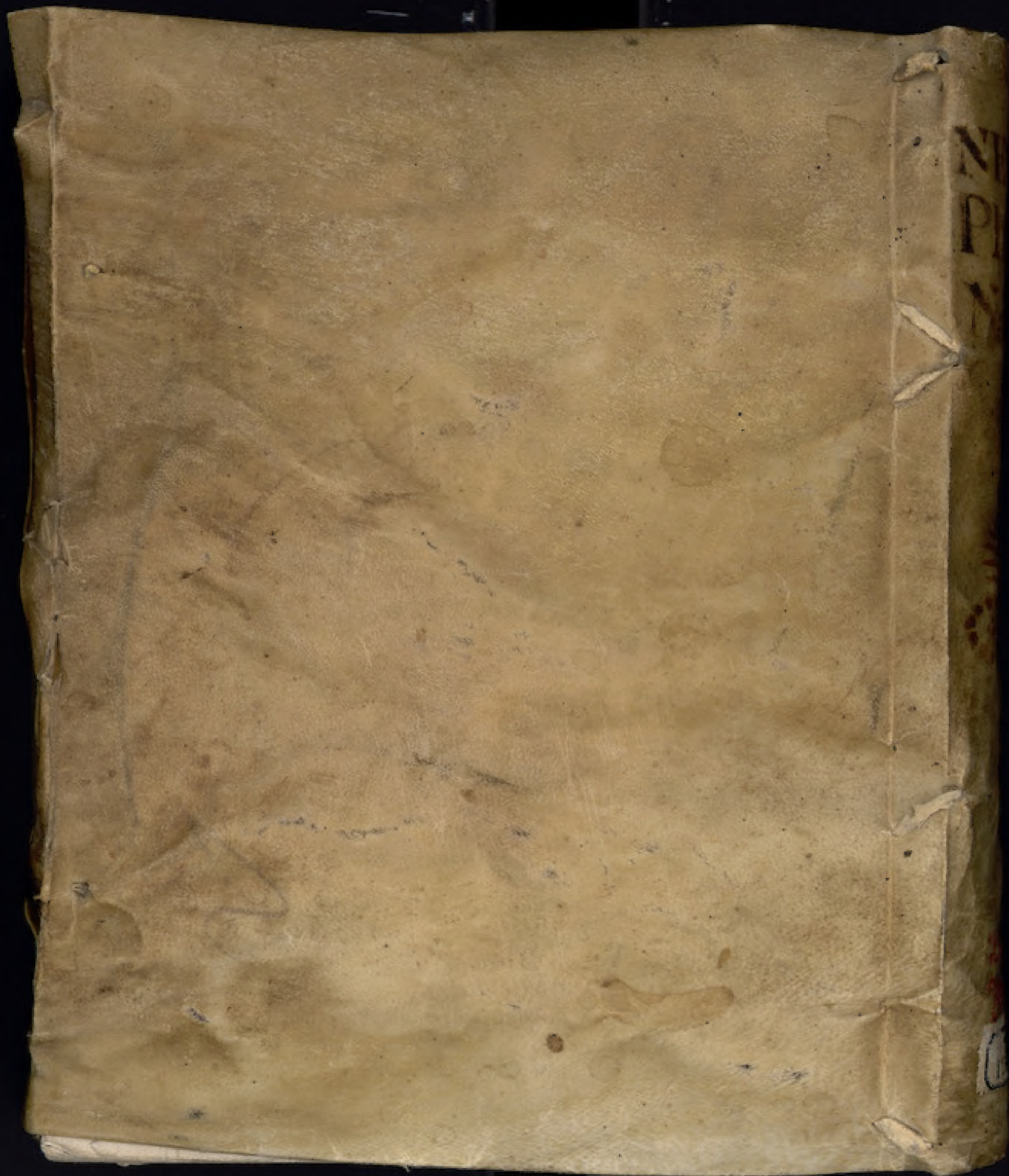
F I N I S.

Errata Sensum turbantia sic Emenda.

Pag. 14 lin. 30 lege. ut OK ad OD seu OL. p. 18 l. 1 recta. p. 61 l. 22 & p. 62 l. 2 pro A Clege AB. p. 81 l. 1. crurum BL, CL vel BM, CM intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam MN, & crurum BA, CA &c. p. 84 l. 17 post verba Nam si lege A & P sint Puncta contactuum ubi vis in tangentibus sita, & p. 91 l. ult. ML, IK. p. 95 l. 3 post majori adde, & perpendicularia minori. p. 95 l. 30 & 31 lege ABC def, & l. 32 abc DEF. p. 104 l. 16 pro GO q. + HG - PO q.) lege HP q. = GO q. + PO - HG q.) p. 105 l. 7 pro G scribe H. p. 118 l. 17 pro C Plege P f B & l. 19 pro C Plege BP. p. 122 l. 28, pro L scribe M. p. 123 l. 13, pro DF lege DF vel EG. p. 125 l. 16 pro omnibus altitudinibus, lege omnibus aequalibus altitudinibus. p. 152 l. 7 per cujus. p. 153 l. 16 & LG. p. 178 l. penult. sit quasi duplo major quam. p. 209 l. 18 pro SL x SI¹, lege SLxSI¹. p. 226 l. 11 pro 2 B² seu $\frac{2}{B \text{ cub.}}$ lege 2 B³ & de le reciproce.

Pag. 242 lin. 2, & p. 262 l. 13, & p. 336 l. 5, pro Q. E. D. lege Q. E. I. p. 243 l. 10 2 CD q. x QB. p. 246 l. 14 proportionalia. p. 249 l. 12 resistentia & tempus. p. 250 l. 1 -rum inverse, amittent. q. 257 l. 4 præteriti, si modo Sectorem tangentes Ap & AP sint ut velocitates. p. 274 l. 17 data quadam. p. 283 l. ult. TQ x PS. p. 296 in Schemate pro O scribe T. p. 307 l. 9 arcus auferantur. p. 312 l. 26 corpus in D. p. 313 l. 3 Describat. p. 314 l. 21 & 28, pro a B K k S lege a B K k T. p. 325 l. 26 B E ad BC. ib. l. ult. æqualis $\frac{BE \text{ quad.}}{CB}$ p. 328 l. 29 & longitudo CZ.

Pag. 411 l. 22 plusquam duplicata, per Prop. LXXXV Lib. I. p. 413 l. 28 $\frac{1}{2}$ p. 416 l. 17 $\frac{1}{2}$ p. 437 l. 9 æquales pertinentium p. 442 l. 11 $69\frac{1}{2}$ ad $68\frac{1}{2}$. ib. l. 18 $68\frac{1}{2}$ ad $69\frac{1}{2}$. p. 449 l. 5 area p D d m p. 450 l. 9 ad aream D P M d. p. 455 l. 30 motum posteriorem. p. 459 l. 2 2 M P x A T qu. p. 482 l. 3 dein b - 2b = c &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic est f. ib. in Schemate infra d 2d 3d scribe f^2 p. 494 l. 4 pro m 27 lege 1 27.



NEWTON
Philologia
Naturalis



20465
20466

12198